

ZUR AXIOMATIK DER EBENEN GEOMETRIE VON LIE
ÜBER EINEM KÖRPER

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Yi Chen
aus Schanghai

Bochum 1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546619_0052

ZUR AXIOMATIK DER EBENEN GEOMETRIE VON LIE
ÜBER EINEM KÖRPER

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Mathematik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Yi Chen

aus Schanghai

Bochum 1967



Dissertation eingereicht am 15.3.1967

Tag der mündlichen Prüfung: 17.7.1967

Referent: Prof. Dr. Walter Benz

Korreferent: Prof. Dr. Günter Ewald

Inhalt

Einleitung	2
§ 0 Grundbegriffe	7
§ 1 Liemengen	12
§ 2 Verbundene Liemengen	20
§ 3 Lieebenen, $[L]$ -Ebenen	25
§ 4 Die Eigenschaften (S) , (T) , (H) , (UV) , $(S3)$, (ZG) , (EP) und (EHP)	33
§ 5 Der Satz von Miquel	41
§ 6 Die Geometrien $K(\mathbb{K})$, $\text{Char } \mathbb{K} \neq 2$	55
§ 7 Pythagoreische, euklidische und reelle Lieebenen	70
Literatur	78

Einleitung

Die klassische Liegeometrie ist isomorph zur Geometrie $K^n(K)^{1)}$, wobei K der Körper der reellen Zahlen ist. Das Ziel dieser Arbeit ist, eine axiomatische Kennzeichnung der Struktur $K^2(K)$, abgekürzt $K(K)$, zu gewinnen, wobei K ein pythagoreischer²⁾, ein euklidischer³⁾ bzw. der reelle Körper ist. Wir wollen unser Axiomensystem stufenweise aufbauen, ähnlich dem Vorgang etwa in den Grundlagen der projektiven Geometrie, wo man den Weg über Inzidenzstruktur, projektive Ebene, projektive Ebene mit Schließungssatz, nehmen kann.

Wir gehen von einer abstrakten Menge $\mathcal{L}$ aus, auf der eine zweistellige, symmetrische und reflexive Relation "-", genannt Berührrelation, gegeben ist. Stehen zwei Elemente $a, b \in \mathcal{L}$ in der Relation "-", so sagen wir auch, daß sie sich berühren.

Die zugrundeliegende Menge heißt Berührmenge, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (B0) Es gibt zwei sich nicht berührende Elemente; es gibt zwei verschiedene und sich berührende Elemente.
- (B1) Berühren sich zwei von drei paarweise verschiedenen Elementen, so existiert ein Element, das alle gegebenen berührt.

1) Unter den "Zykeln" der Geometrie $K^n(K)$ verstehe man die Punkte $\gamma, \eta, \dots$ eines $n+2$ -dimensionalen projektiven Raumes über einem kommutativen Körper K , für die

$$\gamma^T * \eta = 0 \text{ mit } * = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n+3}$

Genau dann sollen sich die Zykeln γ und η berühren, wenn $\gamma^T * \eta = 0$ erfüllt ist.

Vgl. W. Benz [4] und W. Blaschke [5].

- 2) Ein kommutativer Körper K heißt pythagoreisch, wenn $K^{x^2} + K^2 = K^{x^2}$ gilt, wobei $K^* = K \setminus \{0\}$ ist.
- 3) Ein pythagoreischer Körper K heißt euklidisch, wenn $K^{x^2} = K \setminus \{-K^2\}$ gilt.

In § 0 wird eine Liste von Definitionen und Abkürzungen zusammengestellt. Wir übernehmen dabei möglichst viele Begriffe und Symbole von Dubikajtis [8].

Da es sehr wenige in beliebigen Berührmengen gültige Aussagen gibt (vgl. L 1.0.; darin wird die kleinste Berührmenge angegeben), definieren wir gleich in § 1 die Lieschen Berührmengen, abgekürzt Liemengen (s. D 1.1.), und untersuchen sie⁴⁾. Man kann unschwer nachweisen, daß jede Menge, die die Axiome I, II (ohne II3) und III von Dubikajtis erfüllt, eine Liemenge ist. Die Geometrie $K(F_3)$ ⁵⁾ ist die kleinste Liemenge. Zum Abschluß führen wir die Reichhaltigkeitsaxiome (L3) und (L4) ein.

Mit der Eigenschaft (V) (s. D 2.1.) werden in § 2 die verbundenen Liemengen definiert. (V) ist eine abgeschwächte Form des Axioms IV von Dubikajtis. In einer verbundenen Liemenge gilt aber Axiom IV (vgl. S 2.1.). Außerdem leiten wir in § 2 noch einige in verbundenen Liemengen geltende Trennungseigenschaften ab, die in der in § 3 eingeführten Lieebene eine große Rolle spielen.

Eine Lieebene ist eine Liemenge, die eine Möbiusebene im engeren Sinne (vgl. Benz [2]) induziert. In § 3 beweisen wir, daß eine verbundene Liemenge mit Gültigkeit von Axiom (P), genannt [L]-Ebene, eine Lieebene ist. Umgekehrt stellt nicht jede Lieebene eine [L]-Ebene dar. S 3.5. zeigt uns dann die verschiedenen Möglichkeiten der Bezugssystemtransformationen der [L]-Ebene. Die Lemmata und Sätze, die wir in § 3 für [L]-Ebenen bestätigt

4) Läßt man ein beliebiges Element der Liemenge weg, und definiert alle dieses berührenden Elemente als Speere und alle anderen als Zykel, so erhält man eine Laguerre-Ebene im engeren Sinne. Vgl. W. Benz [4].

5) F_3 ist der Körper mit drei Elementen.

haben, gelten auch in allen Lieebenen.

In § 4 untersuchen wir Abhängigkeitsfragen im Bereich der Liemen-
gen. Eine Liemenge besitzt die Trennungseigenschaft (T) (s.
D 4.1.), wenn sie der Eigenschaft (S) (s. D 4.1.) genügt, welche
eine Art Reichhaltigkeitsaxiom ist (man findet (S) in Dubikajtis
[8] als Axiom). In einer verbundenen Liemenge mit (H) (s. D 4.1.)
sind (S) und (T) äquivalent. Mit (UV) (s. D 4.2.) bzw. (S3)
(s. D 4.2.) kommen wir zu Liemengen mit drei unverbindbaren Ele-
menten, die nicht notwendig Lieebenen sind. (H) zusammen mit (UV)
macht aus einer verbundenen Liemenge eine homogene [L]-Ebene (s.
D 4.4.). (ZG) (s. D 4.3.) entspricht der Eigenschaft "zyklisch ge-
ordnet" in der projektiven Ebene. (EP) (s. D 4.6.) besagt etwa
die Existenz eines elliptischen Punktes. (EHP) (s. D 4.6.) ist
dann eine Art E.P.Axiom (vgl. O. Bottema [6]).

Um die Algebraisierung⁶⁾ leisten zu können, führen wir schließ-
lich in § 5 den Satz von Miquel und dessen Verallgemeinerung ein.
Im wesentlichen werden dann gezeigt: (1) In einer verbundenen
Liemenge folgen die Eigenschaften (M) und (H) aus (VM) und (I4),
bzw. (VM), (I4) und (UV) aus (M), (H) und (S3) (daß in einer ver-
bundenen Liemenge mit (UV) die Eigenschaften (M) und (H) mit (VM)
und (I4) äquivalent sind, wird erst in S 7.2. bestätigt). (2) Der

6) L. Dubikajtis [8] hat die klassische n-dimensionale Liegeometrie
axiomatisiert. Entgegen seiner Behauptung muß es aber als offe-
nes Problem angesehen werden, ob sein Axiomensystem auch wirk-
lich für den Fall $n=2$ kategorisch ist. Denn es fehlt noch der
Beweis, daß die von einer solchen axiomatischen Lieebene indu-
zierte affine Ebene immer in hinreichender Weise koordinatisier-
bar ist. Gelingt es nicht, einen Schließungssatz, wie z.B. den
Satz von Desargues, synthetisch abzuleiten, so weiß man auch
nicht, wie die zugehörige axiomatische Lieebene algebraisch be-
schrieben werden könnte. Es scheint nicht gerade einfach zu sein,
ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Andererseits läge eine posi-
tive Antwort vor, wenn man in der Lage wäre zu zeigen, daß eine
Möbiusebene eine Kreisebene im Sinne von v.d.Waerden und Smid
[11] ist, sobald die Kreise den von Dubikajtis [8] auf Seite 91
angegebenen speziellen Pascalschen Satz erfüllen.

Satz von Pappus, ausgedrückt in unserer für die Berührmenge eingeführten Sprache, wird in der Miquelschen homogenen Lieebene abgeleitet (der Beweis ist in gewissem Sinne v.d.Waerden und Smid [11] nachgebildet; Allerdings sind dort einige nicht triviale Fälle außer Acht gelassen worden, die hier aber mit berücksichtigt werden). Wir zeigen auch alle Entartungen zweiter Stufe von (M). Schließlich ist zu erwähnen, daß alle in diesem Paragraphen aufgestellten Lemmata und Sätze auch in jeder Lieebene mit $(M(P))$ unter der Voraussetzung gelten, daß die durch Ziffern dargestellten Elemente immer Punkte sind.

Das klassische Modell der Liegeometrie führt uns zu der Vermutung, daß die in der Einleitung erklärten Geometrien $K(\tilde{\kappa})$ Modelle der verbundenen Liemengen sind im Falle $\text{Char } \tilde{\kappa} \neq 2$. Für den Beweis benutzen wir im wesentlichen eine gewisse t-Figur-Transitivität der linearen Berührgruppe $B(*)$. Die Geometrie $K(F_3)$ ist ein Modell für die kleinste endliche verbundene Liemenge mit (M). Sie erfüllt (S3), aber nicht (L3), (ZG), (P) und (H). Die Sätze S 6.2. bis S 6.4. dienen dann als Vorbereitung für die in § 7 angegebenen Kennzeichnungen der Lieebenen, wobei S 6.2. die Transitivitätseigenschaft (Ta) (s. D 6.4.) für alle Geometrien $K(\tilde{\kappa})$, $\text{Char } \tilde{\kappa} \neq 2$, zeigt. Sowohl (Ta) als auch (Tb) (s. D 6.6.) erzeugt in einer Lieebene eine Gruppe dreifach transitiver Kreisverwandtschaften.

Wir definieren in § 7 zuerst die pythagoreischen, euklidischen und reellen Lieebenen. In S 7.1. können wir drei Klassen Geometrien miteinander identifizieren, in der eine die der pythagoreischen Lieebenen ist. Nach der Definition einer "Dilatation" geben wir fünf weitere Beschreibungen der Klasse der euklidischen

Lieebenen. Schließlich kennzeichnen wir in S 7.3. die klassische Lieebene durch gewisse topologische Eigenschaften bzw. eine Art Dedekindsches Axiom.

Das Problem, ob uns jeweils ein unabhängiges Axiomensystem für jede Klasse von Liemengen bzw. Lieebenen zur Verfügung steht, wird erst in einer späteren Arbeit behandelt, in der wir uns auf Laguerre-Ebenen stützen - im Unterschied zu dem hier eingeschlagenen engeren Weg, nach Induktion einer Möbius-Ebene zu suchen -, wodurch wir auch andere Klassen von Geometrien $K(\tilde{R})$ kennzeichnen können.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Benz, möchte ich für seine Anregung zu dieser Untersuchung, viele wertvolle Hinweise und sonstige Unterstützung, herzlich danken.

§ 0 Grundbegriffe

Gegeben sei eine - in der Einleitung eingeführte - Berührmenge $\mathfrak{A}$, deren Elemente im folgenden durch $0, 1, 2, \dots, 1', 2', \dots$ und kleine lateinische Buchstaben $a, b, a', b', a_1, a_2, \dots$ bezeichnet werden. Zum besseren Verständnis werden Figuren aus der klassischen ebenen Liegeometrie als Beispiele beigelegt. Um Platz zu sparen, zeichnen wir oft eine Figur für mehrere Sachverhalte. Es kommen deshalb Bezeichnungen zur Erklärung der Figuren vor, die erst später definiert werden.

Bezeichne allgemein $(a_1, \dots, a_k)$ ein k -tupel nicht notwendig verschiedener Elemente aus $\mathfrak{A}$. Ist dann R eine der folgenden (zweistelligen und symmetrischen) Relationen (auf $\mathfrak{A}$):

- $=$ (Gleichheit), $\neq$ (Ungleichheit),
- $-$ (Berührung), $+$ (Nichtberühren),

so werde $(a_1, \dots, a_k)_R$ anstelle von $a_1 R a_j$ für alle $a_i, a_j \in (a_1, \dots, a_k)$ mit $i \neq j$ geschrieben. Weiterhin kürze $(1, 2, \dots, k)R(1', 2', \dots, k')$ den Sachverhalt iRj' für alle $i \in (1, 2, \dots, k)$, $j' \in (1', 2', \dots, k')$ ab. Man beachte, daß $(1, 2, \dots, k)_R$ keine Abkürzung für $(1, 2, \dots, k)R(1, 2, \dots, k)$ ist.

D 0.1. Die k Elemente $(1, 2, \dots, k)$ heißen verbindbar, in Zeichen $(1, 2, \dots, k)_0$ (vgl. Fig. 1), wenn es ein x gibt mit $x-(1, 2, \dots, k)$. Sind sie nicht verbindbar, so schreiben wir $(1, 2, \dots, k)_\phi$ (vgl. Fig. 2).

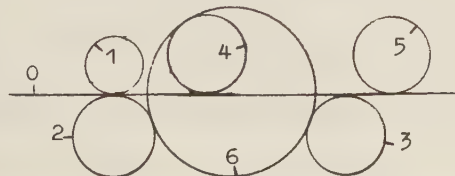


Fig. 1 $0-(1, 2, 3, 4, 5)$ $(2, 3, 4, 5)_{+0}$
 $1\Delta(2, 3, 4)$ $4\Delta(1, 2, 3)$

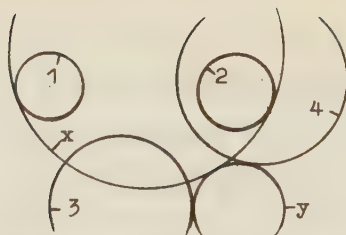


Fig. 2 $(1,2,3,4)_{+\Phi} \quad 1\Delta(2,3,4)_{\Phi\Delta}$
 $(1,2)\chi(3,4)$

D 0.2. Das Element x ist abhängig von $(1,2,\dots,k)$, in Zeichen $x\Delta(1,2,\dots,k)$, wenn für jedes y mit $y-(1,2,\dots,k)$ auch $y-x$ gilt (vgl. Fig. 1,2). $x\Delta(1,2,\dots,k)$ ist dann die Negation von $x\Delta(1,2,\dots,k)$ (vgl. Fig. 1).

D 0.3. Die k Elemente $(1,2,\dots,k)$ heißen abhängig, in Zeichen $(1,2,\dots,k)_{\Delta}$, wenn es ein x unter den $1,2,\dots,k$ mit $x\Delta(1,2,\dots,\bar{x},\dots,k)^{7)}$ gibt. Gilt darüber hinaus $x\Delta(1,2,\dots,\bar{x},\dots,k)$ für alle $x\in(1,2,\dots,k)$, so heißen sie stark abhängig, in Zeichen $(1,2,\dots,k)_{\Delta}$ (vgl. Fig. 3,4). Die Negation von $(1,2,\dots,k)_{\Delta}$ wird in der Form $(1,2,\dots,k)_{\Phi}$ geschrieben (vgl. Fig. 2).

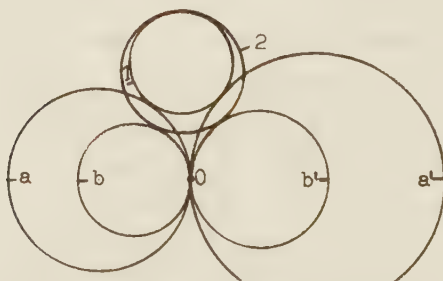


Fig. 3 $(a,a',b,b')_{0\Delta} \quad \alpha\chi\beta$

7) Hier soll die Schreibweise $\bar{x}$ bedeuten, daß das Element x wegzulassen ist.

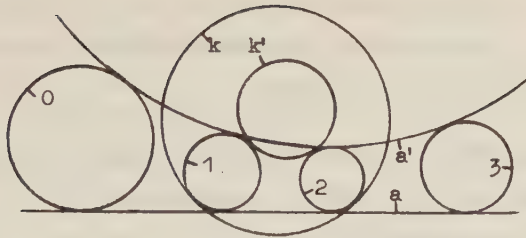


Fig. 4 $(0,1,2,3)_{o\Delta}$ $(1,2,3)_s$ $(1,2,3;a,a')_s$
 $(1,2,3;a,k)_t$ $(0,2)/(1,3)$ $(3,\alpha)_{[0,k]}$

Sei Q eine der oben erklärten Relationen. Dann versteht man unter $(1,2,\dots,k)_{jQ}$, daß je j Elemente von $(1,2,\dots,k)$ die Relation Q erfüllen. Weiterhin soll

$(1,2,\dots,k)_{Q_1 Q_2 \dots Q' Q'' \dots (1',2',\dots,l')_{\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \dots}$ die Zusammenfassung von folgenden Aussagen bedeuten:

$(1,2,\dots,k)_{Q_1}, (1,2,\dots,k)_{Q_2}, \dots (1',2',\dots,l')_{\hat{Q}_1},$

$(1',2',\dots,l')_{\hat{Q}_2}, \dots (1,2,\dots,k)_{Q'}(1',2',\dots,l'),$

$(1,2,\dots,k)_{Q''}(1',2',\dots,l')$ usw.. Diese Abkürzung wird auch für erst später definierte Relationen verwandt.

D 0.4. Zwei sich nicht berührende Elemente werden Dipol genannt. Kleine griechische Buchstaben verwenden wir ausschließlich für Dipole. Die Zuordnung geschieht durch sich in den Alphabeten entsprechende Buchstaben, wie z.B. $\alpha = (a,a')^8$, $\beta = (b,b')$, $\gamma = (c,c')$, ... (sie sind aber nicht geordnet). Man verstehe unter $\alpha \approx \beta$, daß $\{a,a'\} = \{b,b'\}$ gilt (da $\alpha = \beta$ nach der oben eingeführten Regel $(a,a') = (b,b')$ bedeutet, benutzen wir hier das Zeichen " $\approx$ "). $\alpha \napprox \beta$ ist die Negation von $\alpha \approx \beta$.

8) Da die griechischen Buchstaben keine einzelnen Elemente der Berührmenge $\mathfrak{L}$ bezeichnen, kann $\alpha = (a,a')$ selbstverständlich nicht $\alpha = a$, $\alpha = a'$ heißen. - 9 -

Berührt der Dipol α die Elemente $1,2,\dots,k$, d.h. gilt $(a,a')-(1,2,\dots,k)$, so darf dieser auch in der Form $\alpha[1,2,\dots,k]$ geschrieben werden.

D 0.5. Das geordnete 5-tupel $(1,2,3,4,5)$ heißt eine s-Figur, in Zeichen $(1,2,3;4,5)_s$, wenn gilt:

(S1) $(1,2,3)_+-(4,5)_+$,

(S2) Berührt x drei der Elemente $1,2,3,4,5$, so ist x eines davon (vgl. Fig. 4).

Wegen (S2) ist $\alpha=(a,a')$ in $(1,2,3;a,a')_s$ durch $1,2,3$ eindeutig bestimmt. Wir schreiben auch $(1,2,3)_s$, wenn es $(1,2,3;a,a')_s$ gibt.

D 0.6. Das geordnete 5-tupel $(1,2,3,4,5)$ heißt eine t-Figur, wenn gilt: $(1,2,3)_+-4$ und $(1,2)-5+3$ (vgl. Fig. 4). Wir bezeichnen sie mit $(1,2,3;4,5)_t$.

D 0.7. Zwei Dipole α und β heißen tangent, in Zeichen $\alpha \sim \beta$, wenn entweder $a-b$ und $a'-b'$ oder $a-b'$ und $a'-b$ gilt (da der oben eingeführten Regel nach $\alpha-\beta$ $(a,a')-(b,b')$ bedeutet, benutzen wir hier das Zeichen " $\sim$ ") (vgl. Fig.3). Zwei Dipole heißen secant, in Zeichen $\alpha + \beta$, wenn $(a,a',b,b')_+$ gilt.

D 0.8. Das k -tupel $(1,2,\dots,k)$ wird verbunden genannt, wenn $(1,2,\dots,k)_{o\Delta}$ gilt. Die Dipole α und β sind genau dann verbunden, in Zeichen $\alpha o \beta$, wenn $(a,a',b,b')_{o\Delta}$ gilt (vgl. Fig. 3,4). Sie heißen außerdem einfach bzw. doppelt verbunden, $\alpha \oslash \beta$ bzw. $\alpha \oplus \beta$ im Falle $\alpha \sim \beta$ bzw. $\alpha + \beta$.

D 0.9. Die Dipole α und β heißen getrennt, in Zeichen α / β ,

wenn $1=2$ aus $\alpha-1-2-\beta$ folgt (vgl. Fig. 4). α/β ist dann die Negation von α/β (vgl. Fig. 3).

D 0,10. Das Bezugssystem $[0, \kappa]$ ist ein Tripel unverbindbarer Elemente. x heißt ein Punkt bzgl. des Bezugssystems $[0, \kappa]$, in Zeichen $x_{[0, \kappa]}$, wenn es einen Dipol α mit $(0, x) - \alpha \circ \kappa$ gibt. α heißt ein konjugierter Dipol bzgl. des Bezugssystems $[0, \kappa]$, $\alpha_{[0, \kappa]}$, wenn $x_{[0, \kappa]}$ aus $x - \alpha$ folgt. Man nennt 0 bzw. κ den uneigentlichen Punkt bzw. den grundkonjugierten Dipol des Bezugssystems $[0, \kappa]$ (vgl. Fig. 4).

§ 1 Liemengen

Für Berührungsmengen gilt offenbar das folgende Lemma:

L 1.0. (A) Zu einem 1 existiert ein 2 mit $1 \neq 2$.

(B) Zu $1+2$ existiert ein 0 mit $0-(1,2)$.

(C) Aus $1+2$ folgt $1 \neq 2$.

(D) Die kleinste Berührungsmenge besteht aus drei Elementen 0, 1, 2 mit $0-(1,2)_+$.

D 1.1. Eine Liemenge ist eine Berührungsmenge mit den Eigenschaften:

(L1) Zu $0-(1,2)_+$ existiert ein 3 mit $0-(1,2,3)_+$.

(L2) Aus $0-(1,2,3)_+$ folgt $(1,2,3)_S$.

In diesem Paragraphen werden einige Sätze über Liemengen als Grundlage für die weiteren Untersuchungen bewiesen.

L 1.1. Aus $(1,2)_-(3,4)_+$ folgt $1=2$ oder $3=4$.

Beweis: Sei $3+4$. Dann existiert nach L 1.0.(B) und

D 1.1. $(3,4,5;0,1)_S$. Wegen (B1) und D 0.5.(S2) gilt $1=2$.

S 1.1. Wenn drei verschiedene Elemente sich weder alle paarweise berühren noch gar nicht berühren, dann gibt es genau ein Element, das alle drei berührt (es existiert also kein viertes Element, das alle drei berührt, falls schon eines der drei die beiden anderen berührt).

Beweis: Sei nach Voraussetzung $1-2+3$ gegeben. Daraus folgt gemäß (B1) die Existenz von 4 mit $4-(1,2,3)$. Nach L 1.1. ist 4 eindeutig bestimmt. Denn gäbe es ein 4' mit

$(4,4')_+ - (1,2,3)$, so würde gemäß L 1.1. $4=4'$ und dann 2-3 gelten, was der Annahme widerspricht. Im Falle 1-3 bestätigt L 1.1. ferner die Tatsache $4=1$.

L 1.2. Zu 0 existiert ein $0'$ mit $0+0'$.

Beweis: Nach (B0) existiert 1+2. Wenn weder 1 noch 2 das zu suchende $0'$ ist, gilt $0-(1,2)$. Daraus ergibt sich die Behauptung wegen D 1.1. .

Eine Folgerung aus L 1.2. und L 1.0.(B) ist

L 1.3. Aus 1 oder 1+2 folgt die Existenz von $(1,2,3)_S$.

L 1.4. $x \Delta 1$ gilt genau dann, wenn $x=1$ ist.

Beweis: Gemäß Definition brauchen wir nur zu zeigen, daß $x=1$ notwendig für $x \Delta 1$ ist. Zu 1 existiert wegen L 1.3. $(1,2,3;0,0')_S$. Danach bedeutet $x \Delta 1$ $x-(0,0',1)$, entgegen D 0.5.(S2).

L 1.5. Aus $1-(0,0')$ folgt die Existenz von $(1,2,3;0,0')_S$.

Beweis: Gemäß L 1.4. existiert ein 2^0 mit $0-(1,2^0)_+$, woraus sich nach D 1.1. $(1,2^0,3^0;0,0')_S$ ergibt. Der Beweis ist zu Ende, falls $0'=0''$ gilt. Sonst gilt $0'+2^0$ oder $0'+3^0$. Sei o.B.d.A. $2^0+0'$. Infolge S 1.1. haben wir genau ein 2 mit $2-(0,0',2^0)$. Ferner gilt wegen L 1.1. bzw. D 1.1.(I2) $1+2$ bzw. $2+3^0$. Im Falle $0'-3^0$ haben wir $(1,2,3^0;0,0')_S$. Sonst kann man ein 3 mit $3-(0,0',3^0)$ ebenfalls finden, woraus sich $(1,2,3;0,0')_S$ ergibt.

Im Beweis von L 1.5. ist auch das folgende Lemma bestätigt worden:

L 1.6. Aus $(0,0')_+ - (1,2)_+$ folgt die Existenz von $(1,2,3;0,0')_S$.

Zusammenfassung der Lemmata L 1.2., L 1.3., L 1.5. und L 1.6. ergibt:

S 1.2. Jede Konfiguration, die echt kleiner als eine s-Figur ist, kann zu einer s-Figur ergänzt werden.

Eine Folgerung des Lemmas L 1.1. ist:

L 1.7. In $(1.2, 3, 4, 5)_t$ gilt $4+5$.

Analog S 1.2. gilt:

S 1.3. Jede Konfiguration, die echt kleiner als eine t-Figur ist, kann zu einer t-Figur ergänzt werden.

L 1.8. Aus $(1, 2, 3)_\Delta$ folgt $(1, 2, 3)_=$ oder $(1, 2, 3)_{+-}$.

Beweis: Aus $(1, 2, 3)_{2=}$ folgt nach L 1.4. $(1, 2, 3)_=$. Sei also $(1, 2, 3)_{+\Delta}$ und gelte o.B.d.A. $1\Delta(2, 3)$. Wäre $2+3$, so existierte eine s-Figur $(1^0, 2^0, 3^0; 2, 3)_s$, wodurch wegen D 0.5.(S2) $1+\Delta(2, 3)$ unzulässig ist. Mit $2-3$ gilt gemäß D 0.2. $1-(2, 3)$.

S 1.4. Drei nicht alle identische Elemente sind genau dann abhängig, wenn sie paarweise verschieden sind und sich paarweise berühren. Außerdem sind drei abhängige verschiedene Elemente immer stark abhängig.

Beweis: L 1.8. liefert uns den Beweis in einer Richtung. Nun zeigen wir, daß $(1, 2, 3)_\Delta$ aus $(1, 2, 3)_{+-}$ folgt. Wäre o.B.d.A. $1\Delta(2, 3)$, so existierte ein 4 mit $(1, 4)_{+-}(2, 3)_-$, entgegen L 1.1.

Jede Berührreihe⁹⁾ wird also durch zwei berührende Elemente be-

9) Eine Berührreihe ist eine maximale Menge sich paarweise berührender Elemente.

stimmt.

Eine unmittelbare Folgerung aus S 1.4. ist

L 1.9. Aus $\alpha \circ \beta$ folgt $\alpha \approx \beta$ oder $(a, a', b, b')_+$.

L 1.10. Jede der folgenden Eigenschaften (1) und (2) ist

äquivalent mit $\alpha \neq \beta$:

(1) $\alpha \neq \beta$ und $a-b$ (bzw. $a-b'$),

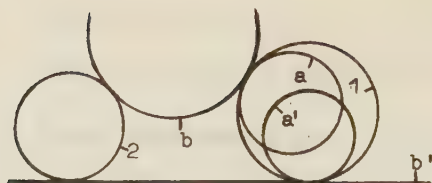
(2) $(\alpha, \beta)_+ - c$, $a-b$ (bzw. $a-b'$) und $a'-b'$ (bzw. $a'-b$).

Beweis: (1) und (2) ergeben sich unmittelbar aus der Definition von $\alpha \neq \beta$. Umgekehrt besagt (1) die Existenz von c mit $c \neq (\alpha, \beta)$. Nach S 1.4. gilt $(a, b, c)_\Delta$. Wäre nun $a-b'$, so folgte wegen L 1.1. $b-b'$, entgegen der Tatsache, daß β ein Dipol ist. Analog muß $a'+b$ gelten. Wäre aber $a'+b'$, dann existierte wegen D 1.1.(L2) ein γ mit $(a', b, b'; c, c')_\Sigma$, woraus nach $\alpha \circ \beta$ $a-\gamma$ und weiterhin wegen L 1.1. mit $a-b$ der Widerspruch $c-c'$ folgt. Damit ist bewiesen worden, daß $\alpha \neq \beta$ aus (1) folgt. Wir kommen jetzt zum Beweis des letzten Teils des Lemmas. Es gilt $c \neq (\alpha, \beta)$. Gemäß S 1.1. existiert jeweils nur ein Element, das drei von a, a', b, b' berührt. Infolge der Voraussetzungen kann dieses Element nur c sein und deshalb erhalten wir $(a, a', b, b')_\Delta$.

L 1.11. Zu $1-\alpha$ und $(1, \alpha)+2$ existiert genau ein β mit

$\alpha \neq \beta - (1, 2)$ (vgl. Fig. 5).

Beweis: Wegen S 1.1. gibt es genau ein b bzw. ein b' mit $b-(1, 2, a)$ bzw. $b'-(1, 2, a')$. Es gilt $b \neq b'$, wie man leicht nachprüft. $1+2$ besagt hier nach L 1.1. $b+b'$. Man beendet den Beweis unter Anwendung von L 1.10.(2).

Fig. 5 $\alpha \not\approx \beta - (1, 2)_+$ α / β

S 1.5. Zwei verbundene Dipole sind entweder einfach oder doppelt verbunden.

Beweis: Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

(1) $\alpha \approx \beta$. Hier gilt $\alpha \approx \beta$.

(2) $(a, a', b, b')_+$. Nach Definition gilt $\alpha \approx \beta$.

(3) Weder (1) noch (2). Sei o.B.d.A. $a-b$. Dann gilt wegen

L 1.10.(1) $\alpha \approx \beta$.

L 1.12. $\alpha \approx \beta$ gilt genau dann, wenn $(a, a', b, b')_+$ ist und ein γ existiert mit $\gamma - (\alpha, \beta)$.

Beweis: Bzgl. Notwendigkeit: Aus $\alpha + \beta$ folgt $\alpha \not\approx \beta$ und aus $\alpha \circ \beta$ die Existenz von c mit $c - (\alpha, \beta)$. Ferner ist das Vorhandensein eines c' mit der gewünschten Bedingung wegen D 1.1.(L2) und der starken Abhängigkeit gesichert.

Zur Umkehrung: Nach L 1.1. folgt $\alpha + \beta$ aus der Voraussetzung. Da drei paarweise sich nicht berührende Elemente höchstens zwei verschiedene Elemente berühren, gilt hier also $(a, a', b, b')_{\Delta}$.

L 1.13. Aus α / β folgt $(a, a', b, b')_+$ oder $\alpha \approx \beta$.

Beweis: Angenommen $a=b$ und $a' \neq b'$. Wegen S 1.4. gilt

$(a, a', b')_{\Delta}$, d.h. es gibt ein c mit $\alpha - c + b'$. Nach (B1) ist nun ein d vorhanden mit $c \neq d - \beta$, entgegen α / β .

L 1.14. Aus α / β und $(\alpha, b)_0$ folgt $\alpha \circ \beta$.

Beweis: Für $\alpha \approx \beta$ ist die Behauptung trivial. Wegen L 1.13. sei also $(a, a', b, b')_{\frac{1}{2}}$. Zuerst zeigen wir $(a, a', b, b')_0$. Im Falle $(a, a', b)_+$ gibt es wegen D 1.1.(L2) $(a, a', b, c, c')_{\frac{1}{2}}$. Nach (B1) existiert ein d mit $d-(c, \beta)$. Gemäß Definition von α / β fallen c und d zusammen. Somit gilt $c-(\alpha, \beta)$. Im andern Falle, d.h. $(a, a', b)_+$ gilt nicht, sei o.B.d.A. $a-b$. Würde hier $\alpha-b$ gelten, so konstruierte man ein x mit $x-\beta$, woraus $\alpha-b-x-\beta$ folgt, was α / β widerlegt. Sei $1-(\alpha, b)$. Wäre $1+b'$, so gäbe es nach S 1.1. ein 2 mit $1\frac{1}{2}-2-\beta$ (vgl. Fig. 5), entgegen α / β . D.h. $1-(\alpha, \beta)$ gilt. Damit haben wir auch $(a, a', b, b')_{\Delta}$ gezeigt. Denn je drei Elemente der beiden Dipole können als a, a', b gedacht werden und das sie berührende als 1.

S 1.6. Die vier Elemente zweier getrennter Dipole sind immer stark abhängig.

Beweis: Die Behauptung ist trivial im Falle $\alpha \approx \beta$. Sonst sei zu unterscheiden, ob $(a, a', b, b')_{\frac{3}{4}}$ gilt oder nicht. Ist es der Fall, liegt die Behauptung nach Definition vor. Ist es nicht der Fall, steht uns L 1.14. zur Verfügung.

Die Bedingungen "+" und "o" bzw. "o" und " Δ " bzw. " Δ " und "+" sind im allgemeinen nicht hinreichend für " Δ " (vgl. Fig. 1,2). Es läßt sich aber unschwer mittels S 1.2. das folgende Lemma beweisen.

L 1.15. Aus $(a_1, a_2, \dots, a_k)_{+o\Delta}$ mit $k \geq 4$ folgt $(a_1, a_2, \dots, a_k)_{\Delta}$.

Schließlich wollen wir noch die kleinste Anzahl der Elemente feststellen, die einen beliebigen Dipol berühren, bzw. die eine beliebige Berührreihe bilden, bzw. die ein beliebiges Element berühren.

L 1.16. Zu $1+2$ existiert $(1,2)_{+}-(3,4,5,6)_{+}$.

Beweis: Es gibt nach S 1.2. $(3,4,5,1,2)_S$ und $(0,1,2,3,5)_S$.

Da wegen S 1.4. $(4,5,0)_{+}$ gelten muß, existiert ein x mit $4+x-(0,5)$. Gemäß D 0.5.(S2) gilt $x+(1,2,3)$. Es existiert dann $(x,1,2,5,6)_S$. Man prüft leicht nach, daß $6+(3,4)$ auch gilt.

L 1.17. Zu $1+2$ existiert $(1,2,3,4)_{+-}$.

Beweis: Es gibt $(a,b,1,2,c)_S$. Nach L 1.16. existiert d und e mit $(a,b)-(c,d,e,2)_{+}$. Wegen 0.5.(S2) gilt $(d,e)+(1,2)$. Nach (B1) sind $3-(1,2,d)$ und $4-(1,2,e)$ vorhanden. Es gilt gemäß L 1.1. $(1,2,3,4)_{+-}$.

Aus L 1.16., L 1.17., D 1.1. und D 0.5. folgt unmittelbar:

L 1.18. Zu 0 existiert $0-(1,2,3,4,5,6,7,8,a,b,c,d)_{+}$.

In § 6 wird gezeigt, daß $K(\mathbb{K})$, $\text{Char } \mathbb{K} \neq 2$, eine Liemenge ist. Man verifiziert leicht, daß $K(F_3)$ aus genau 40 Elementen besteht und daß in $K(F_3)$ gilt: (1) Jeder Dipol berührt genau vier verschiedene Elemente. (2) Jede Berührreihe besteht aus genau vier Elementen. (3) Jedes Element berührt genau zwölf andere Elemente. In einer späteren Arbeit des Verfassers wird gezeigt, daß die kleinste Liemenge zur Geometrie $K(F_3)$ isomorph ist.

Wir führen noch die folgenden Axiome ein:

D 1.2. (L3) Zu $(1,2)_+ - (3,4,5,6)_+$ existiert

$$(1,2)_+ - (3,4,5,6,7)_+.$$

(L4) Zu α existiert $\alpha - (1,2,3,4,5,6,7,8,9)_+.$

L 1.19. In einer Liemenge mit (L3) existiert zu $1+2$

$$(1,2)_+ - (3,4,5,6,7,8)_+.$$

Beweis: Gemäß L 1.16. und (L3) existiert zu $1+2$

$$(1,2)_+ - (3,4,5,6,7)_+.$$

Es gibt ein a mit $(1,2)_+ a - (3,4).$

Nach S 1.1. existiert β mit $(2,5,a) - b, (2,6,a) - b'.$ Es

gilt $(1,7)_+ \beta.$ Wegen D 1.1. (L2) ist ein c mit

$$(1,2)_+ c - (7,\beta)$$

vorhanden und weiterhin aus demselben

Grund ein 8 mit $(1,2,c,7,8)_s.$ Da $c + (3,4,5,6)$ gilt,

gilt auch $(1,2)_+ - (3,4,5,6,7,8)_+ (vgl. Fig. 6).$

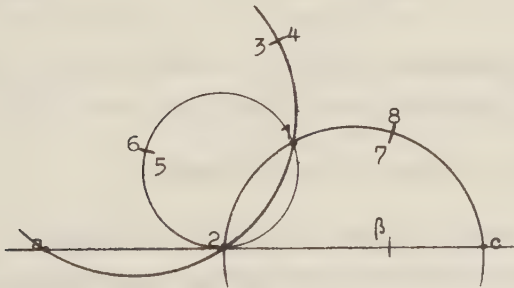


Fig. 6

Es fragt sich, ob man aus (L3) (oder einem entsprechend schwächeren Axiom) (L4) ableiten kann wie L 1.19. aus (L3). In § 4 ist (L4) eine Folgerung aus (H) (s. D 4.1.) und (S3) (s. D 4.2.).

§ 2 Verbundene Liemengen

D 2.1. Eine verbundene Liemenge ist eine Liemenge mit der Eigenschaft:

(V) Aus $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ und $(\alpha, \gamma) \neq -1 + \beta$ folgt $\alpha \circ \gamma$ (vgl. Fig. 7, 8).

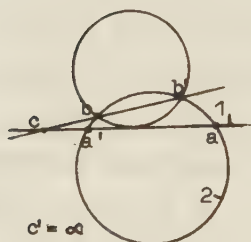


Fig. 7 $\alpha \circ \beta \circ \gamma$
 $(1, \beta)_0$

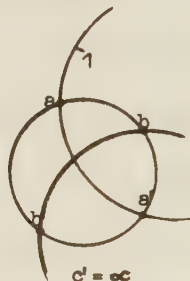


Fig. 8 $\alpha \circ \beta \circ \gamma$
 α / β

Man darf die Bedingung $\alpha \neq \gamma$ in (V) ohne weiteres vernachlässigen, da im Falle $\alpha \sim \gamma$ stets $\alpha \circ \gamma$ gilt.

Nun sei eine verbundene Liemenge gegeben.

L 2.1. Aus $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ und $(\alpha, \gamma) \neq -1 + \beta$ folgt $\alpha \circ \gamma$.

Beweis: Wir betrachten nur den nicht trivialen Fall $\alpha \neq \gamma$. Es gilt o.B.d.A. $a-b$. Es gibt ein 2 mit $1+2-(\alpha, \beta)$, woraus nach L 1.1. $1+2$ folgt. Ist $2-c$ (vgl. Fig. 9), so gilt wegen $\beta \circ \gamma$ $2-c'$, womit sich gemäß L 1.12. $\alpha \circ \gamma$ ergibt. Wir haben ferner noch den Fall $2+c$ zu berücksichtigen. Es gilt keine der vier Relationen: $a-\gamma$, $a'-\gamma$, $c-\alpha$ und $c'-\alpha$ (z.B. würde aus $a-\gamma$ wegen L 1.1. und $1-(\alpha, \gamma)$ der Widerspruch $c-c'$ folgen). Ist nun weder $a+\gamma$ noch $a'+\gamma$ richtig, so muß $\alpha \sim \gamma$ gelten. Gilt $\alpha \sim \gamma$, so folgt nach L 1.10.(2) $\alpha \circ \gamma$ (vgl. Fig. 10). Sonst sei o.B.d.A. $a+\gamma$ (vgl. Fig. 11). Es existiert ein 3

mit $(a, c, c'; 1, 3)_S$. Im Falle $2-3$ würde wegen $(2, a)_{-}(3, b)$ $3-b$ gelten und nun weiterhin wegen $\beta \circ \gamma$ $3-b'$. Mit $(2, 3)_{-}\beta$ ergäbe sich $2=3$, entgegen $2+c-3$. Ist also $2+3$, so gibt es ein a'' mit $(1, 2, 3; a, a'')_S$. Aus $(1, 3)_{+}-(a, a'', \gamma)$ folgt nach L 1.1. $(a, a'', c, c')_{+}$ und ferner nach L 1.12. $(a, a'') \circ \gamma$. Hiermit ist $(a, a'') \circ \beta$ wegen (V) gesichert. Da $(\alpha, \beta)_{-}2$ und $1-(\alpha, a'')$ gelten, erhält man unter Anwendung von L 1.11. $a'=a''$.

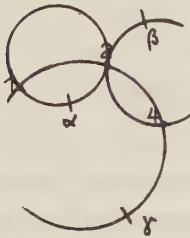


Fig. 9

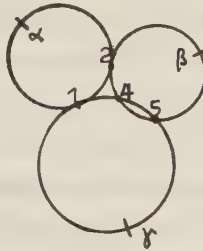


Fig. 10

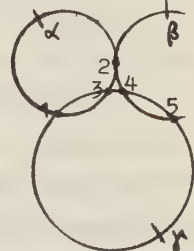


Fig. 11

L 2.2. Aus $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ und $(\alpha, \gamma)_{-}1+\beta$ folgt $\alpha \circ \gamma$.

Beweis: Für den Fall $\alpha \approx \gamma$ ist die Behauptung trivial.

Es gilt o.B.d.A. $b-(a, c)$. Es gibt ein 2 mit $1+2-(\alpha, \beta)$, woraus $1+2$ folgt. Angenommen $2-c$. Dann folgt aus

$2-(\beta, c)$ und $\beta \circ \gamma$ $2-c'$. Man hat damit $\beta \neq \alpha-(1, 2)$

und $\beta \neq \gamma-(1, 2)$, woraus sich wegen L 1.11. der triviale Fall $\alpha \approx \gamma$ ergibt. Sei also $2+\gamma$. Wie im Beweis von

L 2.1. muß $\alpha \sim \gamma$ gelten, wenn weder $a+\gamma$ noch $a'+\gamma$ richtig ist. Aus $\alpha \sim \gamma$ (vgl. Fig. 12) folgt aber nach

L 1.10.(2) $\alpha \circ \gamma$. Sonst sei $a+\gamma$ (vgl. Fig. 13). Es

gibt ein 3 mit $(a, c, c'; 1, 3)_S$. Im Falle $2-3$ gilt $3-b$ und darüber hinaus wegen $\beta \circ \gamma$ $3-b'$, womit sich nach L 1.11.

der triviale Fall $\alpha \approx \gamma$ ergibt. Ist aber $2+3$, so existiert ein a'' mit $(1,2,3,a,a'')_S$. Wie im Beweis von L 2.1. läßt sich hier $(a,a'') \circ \gamma$ zeigen. Damit ist $(a,a'') \circ \beta$ wegen L 2.1. gesichert. Unter Anwendung von L 1.11. erhält man dann $a' = a''$.

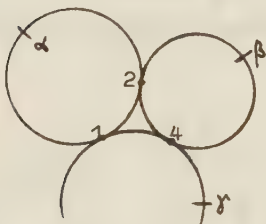


Fig. 12

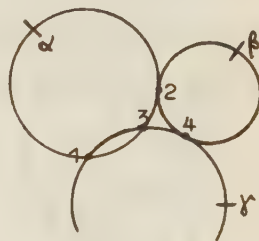


Fig. 13

Aus den obigen beiden Lemmata zusammen mit S 1.5. ergibt sich der folgende Satz in einer Richtung. Die Umkehrung läßt sich unschwer nachweisen.

S 2.1. Zwei Dipole α und β sind genau dann verbunden, wenn ein 1 und ein γ existieren mit $1 + \gamma \circ (\alpha, \beta) - 1$.

L 2.3. Aus $(\alpha, \beta)_\sim \circ \gamma$ folgt $\alpha \circ \beta$.

Beweis: Für den nicht trivialen Fall $\alpha \neq \beta$ gibt es genau ein 2 mit $2 - (\alpha, \beta)$. Wegen L 1.10.(2) braucht man nur noch $2 - b'$ zu zeigen. Wir unterscheiden, ob $2 - \gamma$ gilt oder nicht. Ist es der Fall, so ergibt sich wegen $\beta \circ \gamma$ $2 - b'$ (vgl. Fig. 9). Sonst gilt wegen $\alpha \circ \gamma$ $2 + \gamma$. Es gibt dann ein 4 mit $\alpha + 4 - (\beta, \gamma)$ (vgl. Fig. 10-13). Man hat nach L 1.11. genau ein b'' mit $(2, 4) - (b, b'')_{+ \alpha}$. Gemäß S 2.1. gilt $(b, b'') \circ \gamma$. Durch ein ähnliches Verfahren, wie das im Beweis von L 2.1. benutzte, bestätigt man $b' = b''$ (hier

bestehen allerdings zwei Möglichkeiten, nämlich $(b', b'') \circ \gamma$ und $(b', b'') \circ \delta$.

L 2.4. Aus $c - \alpha \circ \beta$ und $(\beta, c)_\phi$ folgt α / β .

Beweis: Wir wollen hier eine äquivalente Aussage nachweisen: Aus $c - \alpha \circ \beta$ folgt $(\beta, c)_0$. Wegen (B1) ist nur der Fall $c + \beta$ nicht trivial. Seien c' und d' die beiden nach α / β existierenden Elemente mit $\alpha - c' \neq d' - \beta$. Die Aufgabe ist erledigt, wenn $c - d'$ gilt. Andernfalls existiert nach S 1.1. genau ein e mit $e \neq (c, c', d')$ (vgl. Fig. 14). Hiermit ergibt sich $e + b$ (sonst würde wegen $(d', e)_{+-} - (b, c')$ die Beziehung $b - c'$ und nun weiterhin gemäß $\alpha \circ \beta$ noch $b' - c'$ folgen, was wegen $(b, b') - (c', d')$ $_{+-}$ den Widerspruch $b - b'$ hervorruft) bzw. $e + b'$, wodurch die Existenz von d mit $(d, d') - (\beta, e)_s$ gesichert wird. Gilt $c - d$, so folgt die Behauptung, d.h. $\alpha - c \neq d - \beta$. Nun wollen wir aber zeigen, daß $c + \delta$ ausgeschlossen ist. Wäre es möglich, so existierte ein e' mit $(c, d, d', e, e')_s$, woraus sich wegen S 2.1. infolge $\varepsilon \circ \beta \circ \alpha$ ($\varepsilon \circ \beta$ gilt wegen $(\beta, \varepsilon) \sim \delta$ und L 1.12.) und $\beta + c - (\alpha, \varepsilon) \alpha \circ \varepsilon$ ergibt. Damit würde $c' - e'$ (da $c' - (\alpha, e)$) und weiterhin wegen $d' \neq (c', \varepsilon)$ der Widerspruch $e = e'$ hervorgerufen.

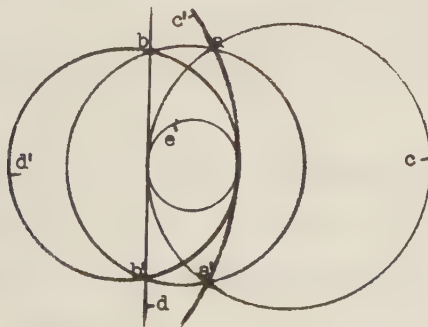


Fig. 14

S 2.2. Seien drei paarweise verschiedene Dipole α , β und γ paarweise verbunden, und existiere ein 1 mit $1-(\alpha, \beta)$ und $(1, \gamma)_\phi$, so sind α , β und γ paarweise getrennt; die Behauptung heißt mit anderen Worten, daß es kein Element außer x gibt, das x und irgendeinen der oben gegebenen drei Dipole berührt, falls x schon irgendeinen der drei Dipole berühren sollte.

Beweis: Infolge der Voraussetzung gilt nach L 2.4.

$(\alpha, \beta)/\gamma$, und es existiert wegen $\alpha \circ \gamma$ ein 2 mit $1+2-(\alpha, \gamma)$. Es bestehen zwei Möglichkeiten, nämlich daß $2+\beta$ gilt oder nicht. Ist es der Fall (vgl. Fig. 15), so folgt wegen β/γ $(2, \beta)_\phi$, woraus sich nach L 2.4. α/β ergibt. Gilt aber $2-b$, so ist wegen $\alpha \circ \beta$ $2-b'$. Man zeigt mit Hilfe von L 1.11. und S 1.5., daß $\alpha \circ \gamma$ oder $\beta \circ \gamma$ gelten muß (man beachte, daß $2-(\alpha, \beta, \gamma)$ und $1-(\alpha, \gamma)_\neq$ gelten). Sei o.B.d.A. $\alpha \circ \gamma$ (vgl. Fig. 16). Es gibt ein 3 mit $\beta+3-(\alpha, \gamma)$. Aus dem letzten folgt gemäß β/γ $(3, \beta)_\phi$ und darüber hinaus gemäß L 2.4. α/β .

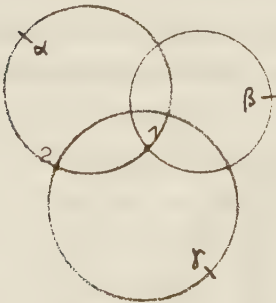


Fig. 15

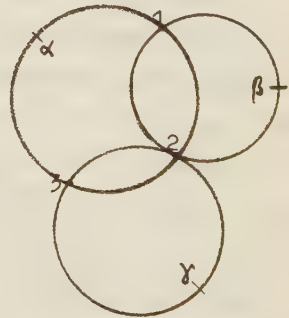


Fig. 16

§ 3 Lieebenen, [L]-Ebenen

Wir wollen in diesem Paragraphen eine Liemenge mit drei unverbindbaren Elementen $0, k, k'$ voraussetzen und diese ausschließlich für das Bezugssystem $[0, \mathbb{K}]$ benutzen. Es gilt wegen L 1.0.(B), (B1) und L 1.11. $0_{[0, \mathbb{K}]}$.

Nun sei zuerst L 1.1. in einer speziellen Form ausgedrückt:

L 3.0. Aus $0+1_{[0, \mathbb{K}]}$ folgt $0+1$.

Nach L 1.11. gilt:

L 3.1. Aus $1-\mathbb{K}$ folgt $1_{[0, \mathbb{K}]}$.

Aus L 1.16., (B1) und L 1.12. ergibt sich:

S 3.0. Zu $1_{[0, \mathbb{K}]}$ existiert ein Dipol β mit $(0, 1) - \beta \circ \mathbb{K}$.

D 3.1. Eine Liemenge ist eine Lieebene, wenn es drei unverbindbare Elemente $0, k, k'$ gibt - als Bezugssystem $[0, \mathbb{K}]$ - derart, daß die Punkte und die konjugierten Dipole - als Kreise - bzgl. $[0, \mathbb{K}]$ eine Möbiusebene im engeren Sinne bilden.

D 3.2. (P) Es gibt ein Bezugssystem $[0, \mathbb{K}]$ mit $(1, 2, 3)_0$ für alle $(1, 2, 3)_{[0, \mathbb{K}]}$.

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist es, eine Lieebene einzuführen und zwar mittels

S 3.1. Eine verbundene Liemenge ist dann eine Lieebene, wenn (P) gilt.

Diesen Satz beweisen wir durch folgende Lemmata und Sätze, wo-

bei eine verbundene Liemenge mit (P) und $[0, \kappa]$ immer vorausgesetzt sei.

L 3.2. Aus $1_{[0, \kappa]}$ folgt $1-\kappa$ oder $(1, \kappa)_\phi$.

Beweis: Sei $1+\kappa$. Dann existieren 2 und α mit $(0, 1)-\alpha$ und $1+2-(\alpha, \kappa)_0$. Es gibt ein 3 mit $\alpha+3-\kappa$ und nun weiterhin gemäß L 3.1. und (P) ein $\beta [0, 2, 3]$. Mit Hilfe von L 1.12., L 2.4. und S 2.2. wird $(\alpha, \beta, \kappa)_0$ bestätigt, woraus $(1, \kappa)_\phi$ folgt.

L 3.3. Aus $1_{[0, \kappa]}+2_{[0, \kappa]}$ folgt $1+2$.

Beweis: Es gibt α und β mit $(0, 1)-\alpha \circ \kappa \circ \beta-(0, 2)$. Das Problem ist im Falle $\alpha \approx \beta$ gemäß L 1.1. gelöst. Sonst gilt wegen S 2.1. $\alpha \circ \beta$ und darüber hinaus wegen S 2.2. $(\alpha, \beta, \kappa)_/$, was $1+2$ besagt.

S 3.2. Gelten $(0, \gamma)_\phi$ und $1+\kappa \circ \gamma^{-1}_{[0, \kappa]}$, so gilt $2_{[0, \kappa]}$ dann und nur dann, wenn $2_{[0, \gamma]}$ gilt.

Beweis: Sei $2_{[0, \kappa]}$ vorausgesetzt. Gilt $2-c$, so konstruiert man ein c mit $(1, 2)-(c, c) \circ \kappa$ und weist $c'=c$ nach (die Konstruktion ist davon abhängig, ob $\gamma \circ \kappa$ oder $\gamma \circ \kappa$ gilt), um $2-\gamma$ zu erreichen. Damit ist gemäß L 3.1. $2_{[0, \gamma]}$. Nun sei $2+\gamma$. Es gibt ein 3 mit $(1, 2)+3-(\gamma, \kappa)$ (vgl. Fig. 17) und darüber hinaus ein α mit $\alpha [0, 2, 3]$. Man bestätigt nun $\alpha \circ \kappa$. Nach Definition existiert δ mit $(0, 2)-\delta \circ \kappa$. Gilt $\delta-3$, so fallen δ und α zusammen. Sonst gilt nach S 2.1. ebenfalls $\alpha \circ \kappa$. Wegen L 1.16. und L 1.12. (im Falle $\alpha \circ \kappa$) existiert ein 4 mit $\kappa-4+(\alpha, \gamma)$, wodurch die Existenz von β mit $\beta [0, 1, 4] \circ \kappa$ wie im Falle $\alpha \circ \kappa$ gesichert ist. Nach S 2.1. gilt infolge $\kappa+0-(\alpha, \beta)$ $\alpha \circ \beta$ und nun weiter-

hin infolge $\beta + 3 - (\alpha, \gamma) \quad \alpha \circ \gamma$, was $2_{[0, \gamma]}$ besagt. Da man stets ein 4 mit $\gamma + 4_{[0, \gamma]} - \kappa$ findet, gilt die Umkehrung selbstverständlich.

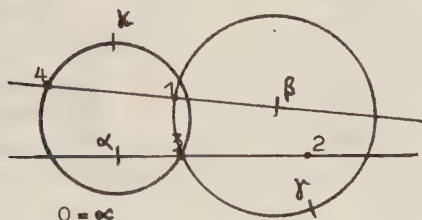


Fig. 17

Wie man leicht erkennt, erfüllt das durch die Voraussetzung von S 3.2. eingeführte Bezugssystem $[0, \gamma]$ ebenfalls die in (P) geschilderte Bedingung, d.h. drei Punkte sind immer verbindbar.

L 3.4. Aus $(1, 2, 3)_{+ [0, \kappa]}$ mit $(1, 2) + \kappa - 3$ folgt $\gamma[1, 2, 3] \circ \kappa$ und weiterhin entweder $0 - \gamma$ oder $(0, \gamma)_{\phi}$.

Beweis: Die eindeutige Existenz von $\gamma[1, 2, 3]$ ist durch (P) und D 0.5.(S2) gesichert. Angenommen $0 + \gamma$. Man unterscheide, ob $\gamma \sim \kappa$ gilt oder nicht. Im Falle $\gamma \sim \kappa$ (vgl. Fig. 18) ist $\gamma \circ \kappa$ wegen L 1.10.(1) richtig. Seien $\alpha[0, 1, 3]$ und $\beta[0, 2, 3]$. Mittels der Existenz von 0 wird wegen S 2.1. zusammen mit S 2.2. $(\alpha, \beta, \kappa)_{o/}$ nachgewiesen. Wegen $(1, \kappa)_{\phi}$ und $1 - (\alpha, \gamma)_{\phi} \circ \kappa$ gilt α / γ , woraus $(0, \gamma)_{\phi}$ folgt. Andernfalls sei $c + \kappa$ (vgl. Fig. 19). Es gibt ein 4 mit $(3, 4) - (c, \kappa)$ und ferner ein c'' mit $(1, 3, 4; c, c'')_S$. Man schreibe $\gamma' = (c, c'')$ und konstruiere $\alpha[0, 1, 3]$ und $\beta[0, 2, 4]$. Es läßt sich dann wie im Falle $\gamma \sim \kappa$ zuerst $(\alpha, \beta, \kappa)_{o/}$ und dann $(\alpha, \gamma', \kappa)_{o/}$ zeigen, woraus $\gamma = \gamma'$ und $(0, \gamma)_{\phi}$ folgen. Für den Fall $0 - c$ bestätigt man $0 - c'$. Es

läßt sich auch unschwer für den Fall $0-\gamma$ mit dem oben verwandten Verfahren $\gamma \circ \kappa$ nachweisen (hier ist keine Konstruktion von β nötig).

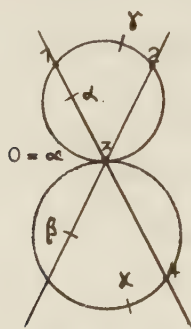


Fig. 18

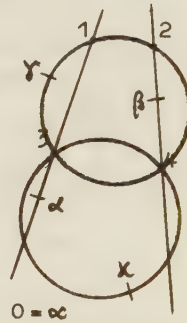


Fig. 19

S 3.3. Jedes Punkt-Tripel bestimmt genau einen konjugierten Dipol, d.h. aus $4 \Delta(1,2,3) + [0, \kappa]$ folgt $4[0, \kappa]$.

Beweis: Die Aussage gilt dann natürlich auch für alle anderen Fälle, wenn sie für den nicht entarteten Fall, näml. $(1,2,3) + \kappa$, bewiesen worden ist. Es gibt nach (P) ein $\beta[1,2,3]$. Unter Anwendung von L 3.1., (P) und D 0.5.(S2) findet man ein γ mit $\beta + \gamma = \kappa$ und ein γ mit $0 + \gamma[2,3,5]$. Es gilt $\gamma \circ \kappa$. Gemäß L 2.4. ist $(0, \gamma)_{\phi}$ richtig, womit nach S 3.2. ein neues Bezugssystem $[0, \gamma]$ mit (P) entsteht und es gilt: "Die Punkte bzgl. $[0, \gamma]$ sind genau die Punkte bzgl. $[0, \kappa]$ ". Weiter haben wir zu unterscheiden, ob $0-\beta$ gilt oder nicht. Ist es der Fall (vgl. Fig. 20), so gilt wegen $(2,3)[0, \gamma]$ die Relation $0-\beta$ und darüber hinaus nach D 0.10. $4[0, \gamma]$, woraus sich $4[0, \kappa]$ ergibt. Ist es nicht der Fall (vgl. Fig. 21), so führen wir das Bezugssystem $[0, \beta]$ ein und bestätigen die Behauptung nach L 3.1. und S 3.2.

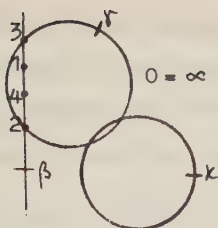


Fig. 20

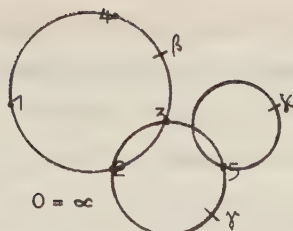


Fig. 21

Als unmittelbare Folgerung der S 3.2., L 3.4. und S 3.3. zitieren wir

L 3.5. Aus $(1, \alpha)_{[0, \kappa]}$ folgt $(1, \alpha)_{\phi}$ oder $1 - \alpha$.

S 3.4. Zu a existiert genau ein $\alpha_{[0, \kappa]}$, wenn a kein Punkt bzgl. $[0, \kappa]$ ist.

Beweis: Nach L 3.5. und D 0.5.(S2) gibt es zu a höchstens einen $\alpha_{[0, \kappa]}$. Um zu zeigen, daß mindestens einer existiert, ist zu unterscheiden

(1) $a - (0, \kappa)$ (vgl. Fig. 22).

(2) $0 + a - \kappa$ (vgl. Fig. 23).

(3) $a + \kappa$ (vgl. Fig. 24).

Zu (1): Es gibt genau ein 1 mit $1 - (a, \kappa)$ und genau ein α mit $\kappa \neq 0 - \alpha - (0, 1)$. Gilt $x - \alpha$, so ist nach D 0.10. $x_{[0, \kappa]}$, womit α als das gesuchte bestätigt wird.

Zu (2): Es gibt genau ein 1 mit $1 - (a, \kappa)$ und genau ein β mit $\kappa \neq 0 - \beta - (0, 1)$. Wie im Falle (1) ist $\beta_{[0, \kappa]}$. L 1.16. und L 3.3. erlauben uns, Punkte 2, 3, 4, 5 zu finden mit $(0, 1, 2, 3, 4, 5)_+$ und $\beta - (2, 3)$, $\kappa - (4, 5)$. Es existieren

$\gamma[1,2,4]_{[0,\kappa]}$ und $\delta[1,3,5]_{[0,\kappa]}$ und gelten $a+(\gamma,\delta)$, woraus sich die Existenz von 6 und 7 mit $6-(a,\gamma)$ und $7-(a,\delta)$ ergibt. Gemäß S 3.3. sind 6 und 7 Punkte bzgl. $[0,\kappa]$. Wegen $a-(1,6,7)_{+}[0,\kappa]$ ist also ein α vorhanden.

Zu (3): Es gibt ein b mit $(0,\kappa')+b-(a,\kappa)$. b ist kein Punkt bzgl. $[0,\kappa]$. Man ergänzt b zu $\beta_{[0,\kappa]}$ wie beim Falle (2) und weiterhin a zu $\alpha_{[0,\beta]}$ wie bei (1) bzw. (2), je nachdem, ob $a=0$ gilt oder nicht. Unter Anwendung von S 3.2. und S 3.3. erhält man $\alpha_{[0,\kappa]}$.

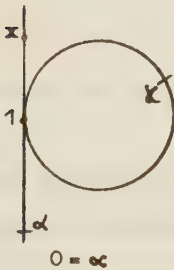


Fig. 22

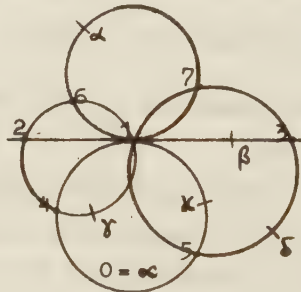


Fig. 23

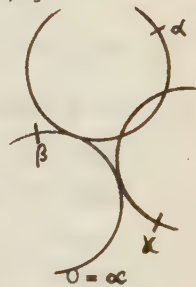


Fig. 24

Der Satz S 3.1. ist damit bewiesen (L 1.11. gewährleistet gerade den Berührsatz der Möbiusebene).

D 3.3. Die verbundenen Lmengen mit (P) werden $[L]$ -Ebenen genannt.

Man überzeugt sich leicht: Die orientierten ebenen Schnitte einer reellen Eifläche, ausgenommen Ellipsoide, bilden unter klassisch erklärter Berührung eine Liebene, die nicht $[L]$ -Ebene ist (d.h. (V) gilt hier nicht). Wir verallgemeinern S 3.2. zu

S 3.5. Gegeben sei eine $[L]$ -Ebene mit $[0,\kappa]$. Gilt $(1,\gamma)_{+}[0,\kappa]$,

so sind genau dann die Elemente Punkte, Nicht-Punkte bzw. konjugierte Dipole bzgl. $[0, \mathbb{K}]$, wenn sie dies auch bzgl. $[1, \mathbb{Y}]$ sind.

Beweis: Nach L 3.5. bilden 1 und $\mathbb{Y}$ ein Bezugssystem. Zu $x_{[0, \mathbb{K}]}$ existiert ein y mit $x+y-\mathbb{Y}$. Es gibt $\alpha[1, x, y]$, und es gilt $\alpha \circ \mathbb{Y}$, was gerade $x_{[1, \mathbb{Y}]}$ besagt. Gemäß diesem Ergebnis, S 3.2. und S 3.4. können die Nicht-Punkte und konjugierten Dipole bzgl. $[0, \mathbb{K}]$ auch genau die entsprechenden bzgl. $[1, \mathbb{Y}]$ sein. Die Umkehrung ist nun trivial, da $(0, \mathbb{K})_{+[1, \mathbb{Y}]}$ gilt.

L 3.6. Gegeben sei eine $[L]$ -Ebene mit $[0, \mathbb{K}]$. So folgt α/β aus $(1, \alpha, \mathbb{Y})_{[0, \mathbb{K}]}$ und $\beta_{[1, \mathbb{Y}]}$.

Beweis: Es gilt nach S 3.5. $\alpha_{[1, \mathbb{Y}]}$ und weiterhin wegen S 3.4., daß die Elemente, die α bzw. β berühren, ausschließlich Punkte bzgl. $[1, \mathbb{Y}]$ sind. Damit ist die Behauptung wegen L 3.3. richtig.

Bisher haben wir uns im wesentlichen auf (V) gestützt. Ist aber eine Liebene statt einer Liemenge mit (P) vorgegeben, so kann mittels bekannter Eigenschaften aus der Möbiusebene im engeren Sinne gezeigt werden:

L 3.7. Aus $(1, 2, 3, 4)_{0[0, \mathbb{K}]}$ folgt $(1, 2, 3, 4)_{\Delta}$.

Hiermit erreicht man ohne (V) durch wesentlich einfachere Beweise:

S 3.6. Die in § 3 für $[L]$ -Ebenen aufgestellten Lemmata und Sätze gelten auch in allen anderen Lieeben mit vorgegebenem Bezugssystem $[0, \mathbb{K}]$.

L 3.8. Es gibt in einer Liebene mindestens einen Dipol, auf dem mindestens fünf Punkte liegen.

Beweis: Sei $[0, \kappa]$ das Bezugssystem. Es gelte $\kappa - (1, 2, 3, 4)$. Man konstruiere $\alpha[0, 1, 3]$. Es gibt ein 5 mit $(0, 1, 2, 3, 4) + 5 - \alpha$. Man konstruiere $\beta[1, 2, 5]$. Es gibt ein 6 mit $(1, 2, 3, 4, 5) + 6 - \beta$. Man bilde $\xi[0, 3, 4]$, $\eta[0, 5, 6]$, $\zeta[2, 4, 6]$ und $\sigma[2, 3, 5]$. Es existiert ein x mit $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) + x - \sigma$ (vgl. Fig. 25). Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: (1) $\xi - x$. (2) $\zeta + x$. Im Falle (1) konstruiere man $\nu[1, x]$ mit $\nu \circ \alpha$ und bestätige die Existenz von 7 mit $(1, 2, 5, 6) + 7 - \beta$, d.h. auf β liegen fünf Punkte. Im Falle (2) fragt man, ob $\sigma \circ \xi$ oder $\sigma \circ \zeta$ gilt. Im Falle $\sigma \circ \xi$ existiert ein 8 mit $(2, 3, 5, x) + 8 - \sigma$, d.h. 8 ist der fünfte Punkt auf σ . Im Falle $\sigma \circ \zeta$ konstruiert man $\delta[0, 2, x]$ und $\varepsilon[1, 2, x]$. Es gilt $(4, 6) + (\delta, \varepsilon) \circ \xi$. Es gibt also y und z mit $(x, 0, 1, 2) + (y, z)$ und $y - (\delta, \xi)$ und $z - (\varepsilon, \zeta)$. Im Falle $y = z$ liegen mit 2, 4, 6, y, z fünf verschiedene Punkte auf ζ . Sonst liegen 0, 1, 2, x, y auf $\delta = \varepsilon$.

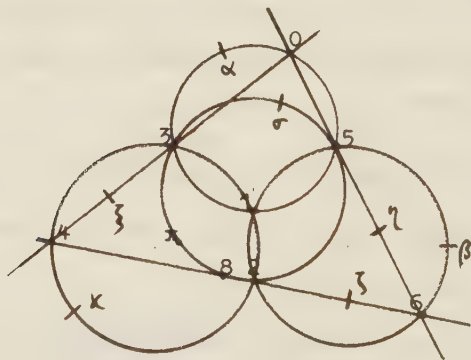


Fig. 25

§ 4 Die Eigenschaften (S), (T), (H), (UV), (S3), (ZG), (EP) und (EHP).

D 4.1. (S) Aus $(1,2,3)_{+0}$, $(1,2,4)_{+0}$ und $(1,3,4)_{+0}$ folgt $(2,3,4)_0$.

(T) Aus $\alpha-(1,2,3,4,5)_\downarrow$, $(1,2)\not\backslash(3,4)$ und $(1,2)\not\backslash(3,5)$ folgt $(1,2)\not\backslash(4,5)$ (vgl. Fig. 26).

(H) Aus $(1,\alpha)_\downarrow$ und $\alpha-(2,3)$ folgt $(1,2,3)_0$.

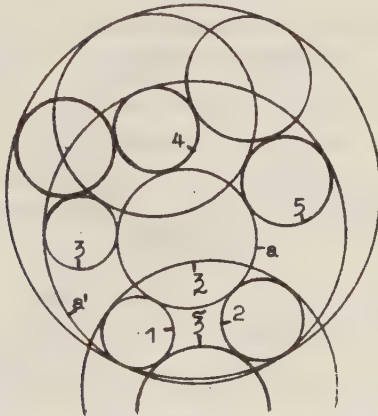


Fig. 26

L 4.1. In einer verbundenen Liemenge mit (S) gilt (T).

Beweis: Es existiert ein 6 mit $(6,a,a';1,2)_S$, womit sich aus der Voraussetzung $(1,2)\not\backslash(3,4)$ bzw. $(1,2)\not\backslash(3,5)$ wegen L 2.4. $(3,4,5)_{+0}$ bzw. $(3,5,6)_{+0}$ ergibt. Daraus folgt nach (S) $(4,5,6)_{+0}$, was wiederum wegen L 2.4. $(1,2)\not\backslash(4,5)$ sichert.

L 4.2. In einer [L]-Ebene mit (S) sind $(1,2)/(3,5)$ und $(1,2)/(4,6)$ äquivalent, wenn $(1,2,3,4)_\downarrow[0,\kappa]$, $\alpha[1,2,3,5]\not\beta[1,2,4,6]$ und $\gamma[2,3,4]\not\delta[2,5,6]$ vorgegeben sind.

Beweis: Es gilt $(5,6)_\downarrow[0,\kappa]$ - dabei ist auch $0=i \in (1,2,3,4,5,6)$ zulässig -. Angenommen es gilt

In § 6 wird gezeigt, daß die Geometrie $K(\tilde{K})$, $\text{Char } \tilde{K} \neq 2$, eine verbundene Liemenge ist. Man prüft leicht nach, daß es keine drei unverbindbaren Elemente gibt im Falle des Körpers der komplexen Zahlen - damit gelten trivialerweise (S), (P) und (H) -. Unabhängig von (P) führen wir hier die Eigenschaften (UV) und (S3) ein.

D 4.2. (UV) Es gibt drei unverbindbare Elemente.

(S3) Zu $i \in (1,2,3)_S$ existieren $\tilde{i}$ und $\underline{i}$ mit $(i, \tilde{i}, \underline{i})_\phi$ und $(\tilde{i}, \underline{i})_j$ für alle $j \in (1,2,3)$ mit $j \neq i$ (vgl. Fig. 26).

L 4.3. In einer Liemenge mit (S3) gilt entweder $(1, \alpha)_\phi$ oder $1-\alpha$, wenn $(1,2,3)_{+0}$ aus $\alpha-(2,3)$ folgt.

Beweis: Zuerst ist zu zeigen, daß $(1, \alpha)_{+0}$ unmöglich ist. Denn aus $(1, \alpha)_{+0}$ folgt nach D 1.1.(L2) $(1, a, a')_S$ und darüber hinaus nach (S3) die Existenz von 2^0 und 3^0 mit $\alpha-(2^0, 3^0)$ und $(1, 2^0, 3^0)_\phi$, was der Voraussetzung widerspricht. Weiter ist zu zeigen, daß $1-a$ auch $1-a'$ nach sich zieht. Wäre $a \neq 1+a'$, so gäbe es wegen (B1) ein x mit $(2,3) \nmid x-(1, \alpha)$, entgegen dem aus der Voraussetzung folgenden $(1,2,x)_{+0}$.

L 4.4. In einer Liemenge mit (H) und (S3) gilt (I4).

Beweis: Zu α existiert $(a, a', b, 1, 2)_S$ und δ mit $(a', b) - \delta$ und $(a, \delta)_\phi$. Es gibt b' und c mit $(a, a', b', c)_{\neq} - \delta$ und existieren $(a, a', b, 3, 4)_S$ und $(a, a', c, 5, 6)_S$. Mit $(1, 2, 3, 4, 5, 6)_{\neq} - \alpha$ ist gezeigt, daß jeder beliebige Dipol mindestens sechs verschiedene Elemente berührt. Es gibt also $(a', b, b', c, e, f)_{\neq} - \delta$. Nach (H) existieren nun $(a, a', d, 7, 8)_S$ und $(a, a', e, 9, 0)_S$. Es gilt dann $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)_{\neq} - \alpha$.

L 4.5. In einer verbundenen Liemenge mit (S) und (S3) folgt die Existenz von 4 mit $(1,2)/(3,4)$ aus $(1,2,3)_{+0}$.

Beweis: Nach S 1.2. existieren ein Dipol mit $(1,2,3,c,c')_S$ und ein c^0 mit $(1,2)-(c^0, \chi)$, woraus sich gemäß (S3) das Vorhandensein zweier Elemente 5 und 6 mit $(5,6)-\chi$ und $(5,6,c^0)_\phi$ ergibt. Aus dem letzten folgt $(1,2)/(5,6)$. Gilt $3=5$, so sei $4=6$. Sonst gilt wegen L 4.1. entweder $(1,2)/(3,5)$ oder $(1,2)/(3,6)$, was $4=5$ oder $4=6$ ermöglicht.

D 4.3. Eine Liemenge heißt zyklisch geordnet (ZG), wenn vier verbundene Elemente immer in genau einer Weise in zwei getrennte Dipole aufgeteilt werden können.

Die Geometrie $K(F_3)$ ist z.B. nicht zyklisch geordnet.

S 4.2. Eine verbundene Liemenge mit (S3), (H) und (T) (oder (S) anstelle (T)) ist zyklisch geordnet.

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Teilen durch. Der erste Teil soll zeigen, daß es höchstens eine Weise gibt, vier verbundene Elemente in zwei getrennte Dipole aufzuteilen, d.h. mit anderen Worten, aus $(1,2)_0/(3,4)$ folgen $(1,3)\chi(2,4)$ und $(1,4)\chi(2,3)$. Sei $\alpha[1,2,3,4]$. Man findet ein b, ein c und ein d mit $(b,3,4)_\phi$, $b-(1,2)$, $c-(1,3,b)$ und $d-(3,4,c)$ (vgl. Fig. 28). Wäre $(a,b,d)_\phi$, so würde wegen (H) $(b,3,4)_0$, ein Widerspruch, folgern. Es gibt also ein e mit $e-(a,b,d)$. Aus $a-(2,4,e)$, $b-(2,c,e)$ und $d-(4,c,e)$ folgt dann nach S 4.1. (oder (S)) $(2,4,c)_0$, was gerade $(1,3)\chi(2,4)$ nach sich zieht. Analog ist $(1,4)\chi(2,3)$ zu bestätigen. Der zweite Teil

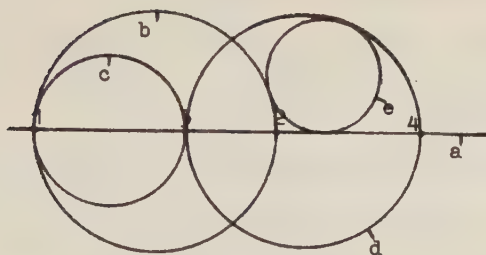


Fig. 28

hat zu widerlegen, daß vier verbundene Elemente existieren, die sich in keiner Weise in zwei getrennte Dipole aufteilen lassen. Nach L 4.5. ist ein 5 vorhanden mit $(1,5)/(2,3)$, woraus sich $(1,3)\cancel{(2,5)}$ und $(1,2)\cancel{(3,5)}$ ergeben. Es bestehen im allgemeinen vier Möglichkeiten für das Verhältnis von $(1,5)$ zu $(2,4)$ und von $(1,5)$ zu $(3,4)$:

- (I) $(1,5)\cancel{(2,4)}$ und $(1,5)\cancel{(3,4)}$. Dies ist aber wegen $(1,5)/(2,3)$ gemäß (T) unmöglich.
- (II) $(1,5)/(2,4)$ und $(1,5)/(3,4)$. Hieraus folgen $(1,2)\cancel{(4,5)}$ und $(1,3)\cancel{(4,5)}$ nach dem bewiesenen ersten Teil und darüber hinaus $(2,3)\cancel{(4,5)}$. Mit der Annahme $(2,3)\cancel{(1,4)}$ ergibt sich hier ein Widerspruch, nämlich $(2,3)\cancel{(1,5)}$.
- (III) $(1,5)/(2,4)$ und $(1,5)\cancel{(3,4)}$. Nach dem zuerst bewiesenen Teil mit der Annahme $(1,3)\cancel{(2,4)}$ ist die eine Beziehung $(2,4)/(3,5)$ und darüber hinaus mit der Annahme $(1,4)\cancel{(2,3)}$ die andere Beziehung $(1,4)\cancel{(3,5)}$ (wegen $(1,4)\cancel{(2,5)}$ aus $(1,5)/(2,4)$) zu folgern. Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich

der Widerspruch $(1,2)/(3,5)$.

(IV) $(1,5) \not\sim (2,4)$ und $(1,5)/(3,4)$. Analog zu (III) mit den Annahmen $(1,2) \not\sim (3,4)$ und $(1,4) \not\sim (2,3)$ folgt der Widerspruch $(1,3)/(2,5)$.

Daß keiner der oben angegebenen Fälle möglich ist, liegt nur an der unzulässigen Annahme, daß 1,2,3 und 4 in keiner Weise in zwei getrennte Dipole aufzuteilen sind.

"Zyklisch geordnet" kann also auch aus ziemlich andersartigen Eigenschaften abgeleitet werden. Unabhängig davon sei als Folgerung von L 4.2. mit Hilfe eines Ergebnisses aus § 4 von S. Crampe [7] angegeben:

L 4.6. Jede in einer $[L]$ -Ebene mit (S) und (ZG) induzierte affine Ebene ist angeordnet.

Wir nennen nun eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine verbundene Liemenge eine $[L]$ -Ebene ist.

L 4.7. Eine verbundene Liemenge ist dann eine $[L]$ -Ebene, wenn (UV) und (H) gelten.

Beweis: Nach (UV) sei $(0, k, k')_\phi$ gegeben. Zu zeigen ist: Aus $(1, 2, 3)_{\neq [0, k] + k}$ folgt $(1, 2, 3)_0$ (es gilt dann selbstverständlich die Verbindbarkeit für die Fälle, daß mindestens einer der Punkte 1, 2 und 3 auf k liegt). Es gibt $\alpha [0, 1, 4]$ mit $\alpha \circ k$ und $\beta [0, 2, 5]$ mit $\beta \circ k$ (vgl. Fig. 29). Wegen S 2.1. und S 2.2. gilt $(2, \alpha)_\phi$, woraus nach (H) die Existenz von $\gamma [1, 2, 4]$ folgt. Analog muß $\delta [1, 3, 4]$ existieren. Hiermit ergibt sich dann wegen S 2.1., S 2.2. und $(1, k)_\phi$ $(\gamma, \delta, k)_{0/}$, was $(3, \gamma)_\phi$ besagt. Es gilt also $(1, 2, 3)_0$.

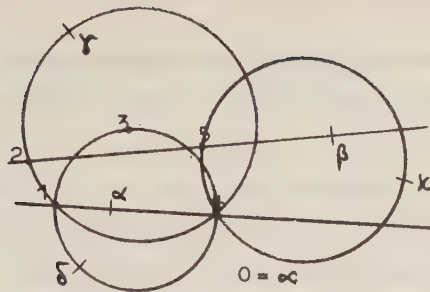


Fig. 29

D 4.4. Wir nennen eine Lieebene homogen, wenn beliebige drei unverbindbare Elemente als Bezugssystem betrachtet werden können.

Mit Hilfe einer kleinen Überlegung kann man L 4.6. in folgende Form bringen:

S 4.3. Eine verbundene Liemenge ist genau dann eine homogene Lieebene, genauer gesagt $[L]$ -Ebene, wenn (UV) und (H) gelten.

D 4.5. In einer Lieebene mit dem Bezugssystem $[O, \kappa]$ werden alle konjugierten Dipole, die O nicht berühren, kreisartige Dipole genannt, die anderen geradenartige. Außerdem heißt ein Punkt e elliptisch bzgl. des kreisartigen Dipols δ , wenn $e \circ \delta$ gilt für alle geradenartigen Dipole α mit $e - \alpha$, ein Punkt p parabolisch bzgl. des kreisartigen Dipols δ , wenn $p - \delta$ gilt, ein Punkt h hyperbolisch bzgl. des kreisartigen Dipols δ , wenn $h + \delta$, $(O, d, h)_O$ und $(O, d', h)_O$ gelten.

Ähnlich dem E.P.Axiom in der projektiven Ebene (vgl. O. Bottema

[6]) führen wir hier die folgenden Axiome ein:

D 4.6. (EP) In einem gewissen Bezugssystem existiert mindestens ein Punkt, der elliptisch bzgl. eines kreisartigen Dipols ist.

(EPH) In einer Lieebene mit $[0, \kappa]$ sind die Punkt bzgl. eines beliebigen kreisartigen Dipols entweder elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.

S 4.4. (EP) und (EPH) gelten in jeder homogenen Lieebene mit (S3).

1.

Beweis: Seien $(0, \kappa)_\phi$ und $(1, 2) - \kappa$. Nach (H) existiert der Dipol $\gamma[0, 1, 2]$. Es gilt $(\kappa, \gamma)_s$, was wegen (S3) die Existenz von 3 und 4 mit $(3, 4) - \gamma$ und $(3, 4, \kappa)_\phi$ sichert. 3 und 4 sind aber Punkte im $[0, \kappa]$. Nach S 3.5. kann man das Bezugssystem $[4, \kappa]$ bilden, wobei 3 immer noch ein Punkt bleibt. Da $(3, 4, \kappa)_\phi$ gilt, gilt $(\kappa, \delta)_o$ für alle δ mit $\delta - (3, 4)$, was besagt, daß 3 ein elliptischer Punkt bzgl. κ im Bezugssystem $[4, \kappa]$ ist. Damit haben wir (EP) abgeleitet. Für den Beweis der zweiten Behauptung sei ein beliebiges Bezugssystem $[0, \kappa]$ gegeben. So entsteht eine $[L]$ -Ebene. Ist y in dieser Lieebene bzgl. eines beliebigen kreisartigen Dipols δ weder parabolisch noch hyperbolisch, so gilt $y + \delta$ und $(0, d, y)_\phi$. Aus $\alpha[0, \kappa] - (0, y)$ folgt wegen (H) $(\alpha, d)_s - (1, 2)[0, \kappa]$. Nach S 3.4. kann d in genau einer Weise zu einem geradenartigen Dipol ergänzt werden, welcher also δ sein muß. Damit gilt dann $\delta \circ \kappa$, was sicherstellt, daß y ein elliptischer Punkt bzgl. δ ist.

§ 5 Satz von Miquel

Ähnlich dem Satz von Miquel in der Möbiusebene haben wir hier unter den Namen Satz von Miquel (M) und verallgemeinertem Satz von Miquel (VM) folgende Aussagen:

D 5.1. (M) Aus $(1,2,3,4,5,6,7,8)_+$ und $(\alpha[1,2,3,4], \beta[1,2,5,7], \gamma[1,4,5,6], \delta[2,3,7,8], \varepsilon[3,4,6,8])_{\#}/$ folgt $(5,6,7,8)_\Delta$ (vgl. Fig. 30,31,32).

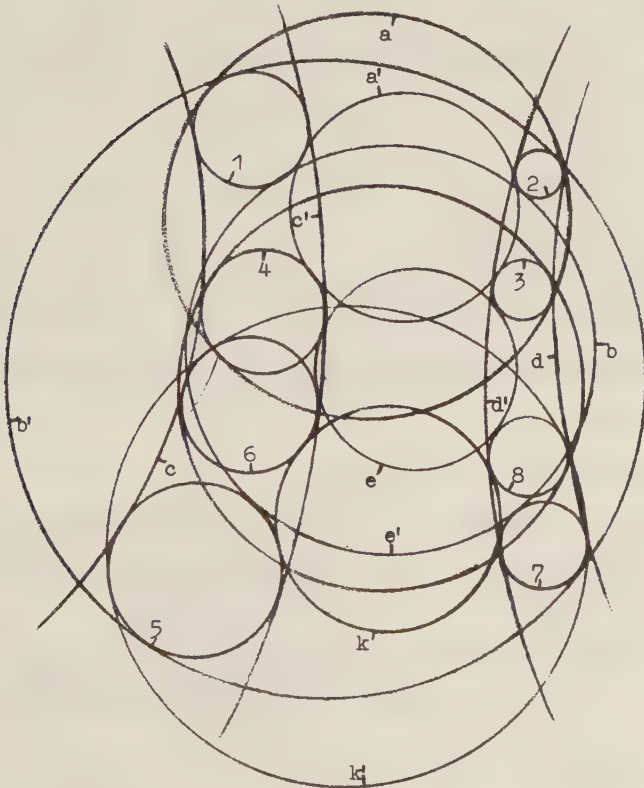


Fig. 30

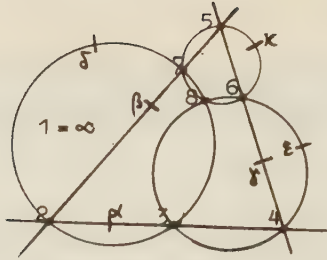


Fig. 31

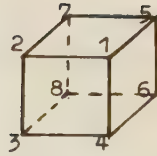


Fig. 32

(VM) Aus $(1,2,3,4,5,6,7)_+$, $(2,3,4,5,6,7)_{4\phi}$ und $(\alpha[1,2,3,4], \beta[1,2,5,7], \gamma[1,4,5,6])_{\#}$ folgt die Existenz von 8 mit $(2,3,7,8)_{0\Delta}$, $(3,4,6,8)_{0\Delta}$ und $(5,6,7,8)_{0\Delta}$ (vgl. Fig. 30, 31, 32).

Ist eine verbundene Liemenge gegeben, so gelten:

L 5.1. Aus (VM) folgt (M).

Beweis: Die Voraussetzung von (VM) ist in der von (M) enthalten. (In (M) gilt $(2,3,4,5,6,7)_{4\phi}$). Das nach (VM) existierende 8 ist aber genau das in (M) δ und ε berührende.

L 5.2. Aus (VM) und (I4) folgt (H).

Beweis: Gegeben sei $(1,\alpha)_\phi$ und $\alpha-(2,3)$. Bei der unteren Konstruktion beruht die Existenz wesentlich auf S 1.2., L 1.11. und L 1.19. Es gibt nämlich:

(1) ein b mit $\alpha+b-(1,2)$. Das Problem ist gelöst im Falle $b=3$. Sonst existiert ein 4 mit $2\#4-(\alpha,b)$ (vgl. Fig. 37). Man ergänze b zu $\beta[1,2,4]$.

(2) Ein n mit $\beta+n-(1,3)$. Im Falle $n=2$ ist die Aufgabe erledigt. Sonst sei $1\#5-(n,\beta)$. n werde zu $\nu[1,3,5]$ ergänzt. Es gilt wegen $\alpha\circ\beta\circ\nu$ und $\beta+3-(\alpha,\nu)$ $(\alpha,\beta,\nu)_0$. Hieraus folgt wegen $(1,\alpha)_\phi$ und $1-(\beta,\nu)$

$(\alpha, \beta, \gamma) /$, was $(5, \alpha)_{\phi}$ besagt.

(3) Ein p mit $(2, 3, \alpha) + p - (1, 4)$. Sei $1 \neq x - (p, \alpha)$. Man ergänze p zu $\pi[1, 4, x]$.

(4) Ein c mit $c - (4, 5, p)$. Infolge $4 - (c, \pi)$ und $c - p$ ist hier der Fall $a - c$ bzw. $a' - c$ ausgeschlossen, d.h. es gilt $4 - (\alpha, c)_{+}$.

(5) Ein 6 mit $(a, a', c, 4, 6)_{\S}$. c werde zu $\gamma[4, 5, 6]$ ergänzt. Es gilt $\pi \circ \gamma \circ (\alpha, \beta)$. Hieraus folgt wegen $(5, \alpha)_{\phi}$ und $5 - (\beta, \gamma)$ $(\alpha, \beta, \gamma) \neq /$.

(6) Ein 7 mit $(1, 2, 3, 5, 6, 7)_{\neq 4 \phi}$ oder $(1, 2, 3, 7)_0$ (in diesem Fall ist unsere Aufgabe schon erledigt). Denn es gilt $(1, 2, 3, 5, 6)_{\neq 4 \phi}$ und es kann höchstens jeweils ein x, y, z, u, v mit $(1, 2, 6, x)_{\Delta}$, $(1, 3, 5, y)_{\Delta}$, $(1, 3, 6, z)_{\Delta}$, $(2, 3, 5, u)_{\Delta}$, $(3, 5, 6, v)_{\Delta}$ und zugleich $(x, y, z, u, v) - \gamma$ gegeben, aber es existieren nach (I4) mindestens neun Elemente, die γ berühren (vgl. Fig. 33). Die oben eingeführten $1, 2, \dots, 7$ mit α, β, γ erfüllen bis auf Permutationen (vgl. Fig. 34) alle Voraussetzungen von (VM). Also ist ein 8 zu finden mit $(1, 2, 3, 8)_{0 \Delta}$.

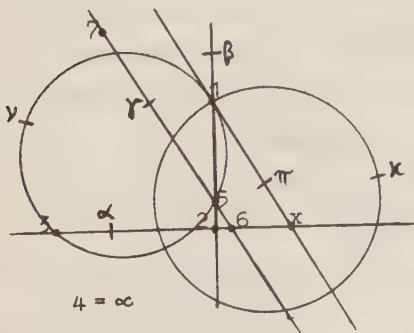


Fig. 33

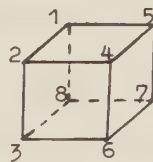


Fig. 34

D 5.2. Der entartete Satz von Miquel.

(M') Unter der Annahme $(1,2,3,4,5,6,7)_{\neq 5\phi}$ folgt jede der folgenden fünf Aussagen aus den übrigen:

- (1) $\alpha[1,2,3,4]$ und $(7,\alpha)_{\phi}$.
- (2) $\beta[1,2,5,7]$ und $(4,\beta)_{\phi}$.
- (3) $\gamma[1,4,5,6]$ und $(7,\gamma)_{\phi}$.
- (4) $\varepsilon[3,4,6,7]$ und $(1,\varepsilon)_{\phi}$.
- (5) $\delta[2,3,7] \oplus \kappa[5,6,7]$ (vgl. Fig. 35, 36).

S 5.1. Aus (H) und (M) folgt (M').

Beweis: Angenommen (1), (2), (3) und (4) gelten. Man konstruiere $\delta[2,3,7]$ und $\kappa[5,6,7]$. Gemäß S 2.2. gilt $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa)_{\neq 0/}$. Wäre nicht $\delta \oplus \kappa$, so gäbe es ein 8 mit $7\#8-(\delta, \kappa)$. Hiermit ergibt sich nach (M) $(3,4,6,8)_{\Delta}$, was unmöglich ist. Denn es gilt sonst $(6,7,8)_{\neq}-(\varepsilon, \kappa)_{\neq}$. Nun seien (2), (3), (4) und (5) vorausgesetzt. Man konstruiere $\alpha[1,3,4]$. Im Falle $\alpha \oplus \beta$ existiert ein 2° mit $1\#2^{\circ}-(\alpha, \beta)$. Mit Hilfe des oben bewiesenen Falles zeigt man, daß 2 und 2° zusammenfallen. Andernfalls, d.h. wenn $\alpha \not\oplus \beta$ gilt, folgt ein Widerspruch. Denn es gilt entweder $\mu[1,3,7] \oplus \kappa$ oder $\pi[1,4,7] \oplus \kappa$ (vgl. Fig. 37). Es gibt also ein 8 mit $7\#8-(\mu, \kappa)$ oder $7\#8-(\pi, \kappa)$. Man benutze den eben bewiesenen Fall, um die Existenz von $\beta^{\circ}[1,5,8]$ mit $\alpha \circ \beta^{\circ}$ zu erkennen (vgl. Fig. 38, 39). Der Widerspruch liegt darin, daß mehr als ein Dipol β existiert mit $(1,5)-\beta \not\oplus \alpha$. Es gilt außerdem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa)_{\neq 0/}$, woraus $(7,\alpha)_{\phi}$ folgt. Analog muß (3) aus den anderen folgen. Ebenfalls nur aus Symmetrie ergibt sich (2) aus den anderen, wenn es uns gelingt zu

zeigen, daß (4) aus den übrigen folgt. Da wegen (5) $\delta \sim \varepsilon [4,6,7]$ nicht gelten darf, existiert ein 3^0 mit $7 \neq 3^0 - (\delta, \varepsilon)$. Gemäß dem im zweiten Teil bewiesenen muß dann $3^0 - \alpha$ richtig sein, woraus wegen $(2,3)_+ - (\alpha, \delta)$ $3 = 3^0$ folgt. Es gilt $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \chi)_{40/}$, was $(1, \delta)_\phi$ sichert.

Unter Berücksichtigung der (M') kann (M) in der folgenden Form erweitert werden:

D 5.3. Der volle Satz von Miquel.

(M) Aus $(1,2,3,4,5,6,7)_+$ und $(\alpha[1,2,3,4], \beta[1,2,5,7], \gamma[1,4,5,6], \delta[2,3,7,8], \varepsilon[3,4,6,8])_{40/}$ folgt $(5,6,7,8)_\Delta$.

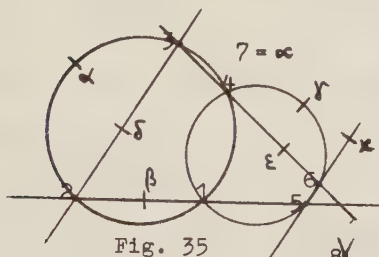


Fig. 35

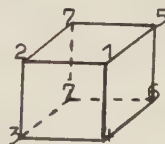


Fig. 36

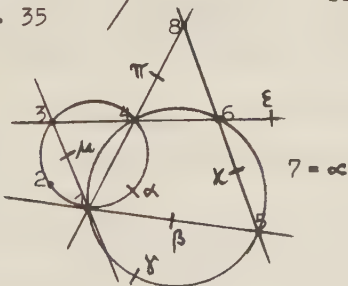


Fig. 37

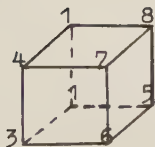


Fig. 38

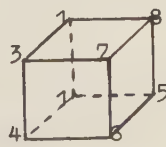


Fig. 39

L 5.3. Aus (H) und (M) folgt (VM).

Beweis: Nach (H) sind $\delta[2,3,7]$, $\varepsilon[3,4,6]$ und $\kappa[5,6,7]$ vorhanden. Es gilt $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa)_{\neq 0/}$. Wäre $\delta \circ \varepsilon$, so würde wegen (M') $3-\kappa$ gelten, d.h. $(3,5,6,7)_0$ (vgl. Fig. 40), entgegen $(2,3,4,5,6,7)_{4\phi}$. Ist also $\delta \circ \varepsilon$, so gibt es ein 8, was gemäß (M) genau das gewünschte in (VM) ist.

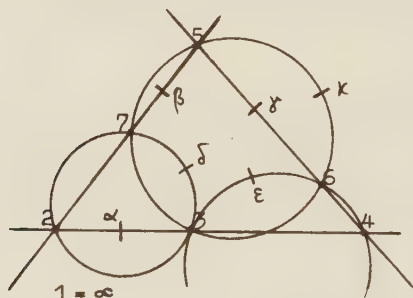


Fig. 40

Aus L 4.4., L 5.1. bis L 5.3. und S 5.1. ergibt sich:

S 5.2. Aus (VM) und (L4) folgt (M) und (H). Umgekehrt folgt (VM) und (L4) aus (M), (H) zusammen mit (S3).

Unter Berücksichtigung der entarteten Fälle kann man (VM) auch in der folgenden Form erweitern:

D 5.4. Der volle verallgemeinerte Satz von Miquel.

(VM) Aus $(1,2,3,4,5,6,7)_{\neq}$ und

$(\alpha[1,2,3,4], \beta[1,2,5,7], \gamma[1,4,5,6])_{\neq/}$

folgt die Existenz von 8 (nicht notwendig verschieden von 1 bis 7) und $\delta[2,3,7,8]$,

$\varepsilon[3,4,6,8]$ und $\kappa[5,6,7,8]$.

Wir benötigen noch zwei Lemmata, um den affinen Satz von Pappus, nämlich S 5.3., abzuleiten. Vorausgesetzt sei eine verbundene Liemenge mit (M) und (H).

L 5.4. Unter den Annahmen $(0,1,2,3,4,5)_\#$ und $(4, \alpha[0,1,2])_\phi$ folgt jede der folgenden vier Aussagen aus den anderen drei:

- (1) $(0,1,2,3)_\Delta$. (2) $(1,2,4,5)_\Delta$.
 (3) $\gamma[0,2,4] \neq \delta[0,3,5]$. (4) $\beta[0,4,5] \neq \varepsilon[1,3,5]$.
 (vgl. Fig. 41).

Beweis: Angenommen es gelten (1), (2), (3) (sie sind verträglich) aber nicht (4). Es existieren $\beta[0,4,5]$, $\varepsilon[1,3,5]$ mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)_{\neq 0/}$ und ein 6 mit $5 \neq 6 - (\beta, \varepsilon)$. Es gibt ein ξ mit $\delta \neq \xi[0,3,6]$. Wegen (M') gilt dann $\gamma \neq \xi$, entgegen (3) wegen L 1.11. Damit ist bewiesen worden, daß (4) aus den anderen folgt. Aufgrund der Symmetrie folgt (3) aus den übrigen. Denn die Aussagen (1) und (3) gehen in (2) und (4) über und umgekehrt, wenn man 0 mit 5, 1 mit 2 und 3 mit 4 zugleich vertauscht. Mit derselben Erklärung folgt (1) aus den übrigen genau dann, wenn (2) sicher aus den anderen folgt. Angenommen (1), (3) und (4). Man konstruiere $\kappa[1,2,5]$. Da $\beta \neq \varepsilon \neq \kappa$ und $\varepsilon \neq 4 - (\beta, \kappa)$ gelten, ergibt sich $\beta \neq \kappa$, d.h. es gibt ein 4^0 mit $5 \neq 4^0 - (\beta, \kappa)$. Sei $\gamma^0[0,2,4]$. Unter Anwendung des oben bewiesenen Falles gilt $\gamma^0 \neq \delta$, (vgl. Fig. 42), woraus man $\gamma^0 = \gamma$ und weiterhin $4 = 4^0$ schließt.

L 5.5. Unter den Annahmen $(0,1,2,3,4,5,6)_\#$ und $(4, \mu[0,1,2])_\phi$ folgt jede der unten stehenden Aussagen aus den übrigen:

$0 \neq 1^0 - (\alpha, \mu)$ und dann das Zusammenfallen von 1^0 und 1. Alle anderen Behauptungen gelten aufgrund der Symmetrie. Denn (1) und (3) gehen entsprechend in (2) und (4) über und umgekehrt, wobei (5) und (6) invariant bleiben, wenn man 1 mit 6, 2 mit 5 und 3 mit 4 vertauscht.

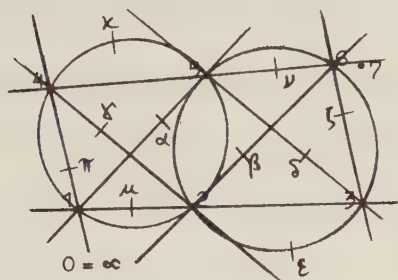


Fig. 43

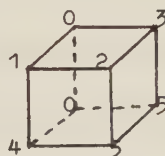


Fig. 44

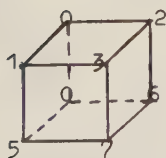


Fig. 45

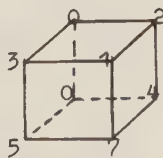


Fig. 46

S 5.3. Unter den Annahmen $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)_\#$ und $(4, \mu[0, 1, 2])_\phi$ ist jede der folgenden Aussagen aus den übrigen ableitbar:

$$(1) (0, 1, 2, 3)_\Delta.$$

$$(2) (0, 4, 5, 6)_\Delta.$$

$$(3) \alpha[0, 1, 5] \neq \beta[0, 2, 6].$$

$$(4) \gamma[0, 2, 4] \neq \delta[0, 3, 5].$$

$$(5) \pi[0, 1, 4] \neq \zeta[0, 3, 6].$$

Beweis: Aus Symmetrie brauchen wir nur zu zeigen, daß

(1) bzw. (5) aus den übrigen folgt. Die Erfahrung, die wir bei dem Beweis von L 5.4. und L 5.5. gemacht haben, dürfte es uns erlauben, den Rest zu sparen, wenn wir bestätigt haben, daß (5) sich aus den anderen ableiten läßt. Angenommen (1), (2), (3) und (4) gelten. So existieren $\mu[0,1,2,3]$, $\nu[0,4,5,6]$, $\pi[0,1,4]$, $\alpha[0,1,5]$, $\beta[0,2,6]$, $\gamma[0,2,4]$, $\delta[0,3,5]$, $\zeta[0,3,6]$, $\kappa[1,2,4]$ und $\varepsilon[2,3,6]$. Für κ und ν bestehen vier Möglichkeiten, nämlich (A) $\kappa \circ \nu$ (vgl. Fig. 47). (B) $(4,5) - (\kappa, \nu)$ (vgl. Fig. 44). (C) $(4,6) - (\kappa, \nu)$. (D) Es gibt ein 7 mit $(4,5,6) \# 7 - (\kappa, \nu)$ (vgl. Fig. 48).

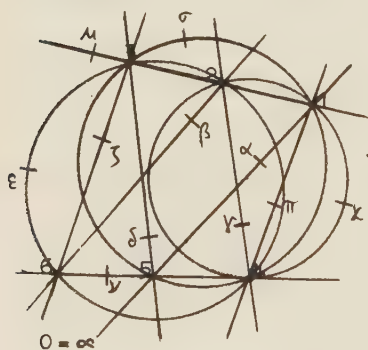


Fig. 47

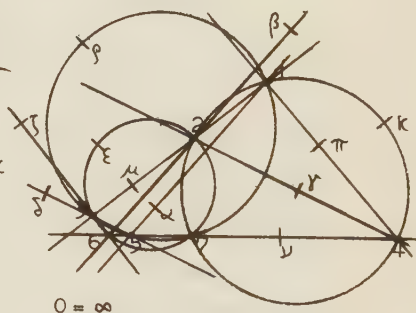


Fig. 48

Zu (A): Wegen L 5.4. existiert infolge μ, ν, κ, γ und δ $\sigma[1,3,4,5]$ (vgl. Fig. 49). Mit α, β, μ, ν und σ ergibt sich gemäß (M') $4 - \varepsilon$ (vgl. Fig. 50), woraus nach L 5.4. (5) folgt (vgl. Fig. 51).

Zu (B): Wegen L 5.5. gilt $5 - \varepsilon$ (vgl. Fig. 52). Wäre nicht $\pi \circ \zeta$, so existierte ein 8 mit $0 \# 8 - (\pi, \zeta)$, woraus sich ein Widerspruch ergäbe, näml. $(1,4,8) \# -(\nu, \kappa)$ (vgl. Fig. 53).

Zu (C): Vertauscht man 1 mit 3 und 4 mit 6, so gehen α, γ, π und ε entsprechend in β, δ, ζ über und umgekehrt, wobei μ und ν invariant bleiben. Es ist damit klar, daß sich ε zu ν verhält wie κ zu ν mit vorläufig drei Möglichkeiten analog (A), (B) und (D). Genauer betrachtet kommt aber nur der zu (A) analoge Fall vor, näml. $\varepsilon \circ \nu$.

Zu (D): Infolge $\nu[0,4,5,7], \mu, \gamma, \delta$ und κ existiert wegen $(M') \S[1,3,5,7]$ (vgl. Fig. 54). Daraus ergibt sich $7-\varepsilon$ infolge μ, ν, α, β und $\S$ (vgl. Fig. 55). $7-\varepsilon$ bedeutet hier das gleiche wie $5-\varepsilon$ in (B). Deshalb kann auch derselbe Schluß angewandt werden (vgl. Fig. 56).

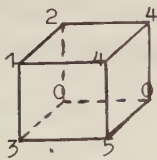


Fig. 49

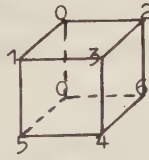


Fig. 50

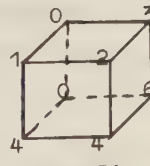


Fig. 51

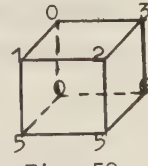


Fig. 52

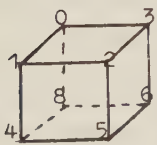


Fig. 53

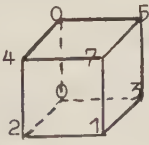


Fig. 54

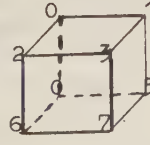


Fig. 55

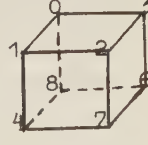


Fig. 56

Außer L 5.4. gibt es noch zwei andere Entartungen von (M') .

L 5.6. Unter den Annahmen $(0,1,2,3,4,5)_\#$ und $(4, \alpha[0,1,2])_\phi$ läßt sich jede der folgenden Aussagen aus den übrigen drei ableiten:

$$(1) (0,1,2,3)_\Delta \dots$$

$$(2) (0,1,4,5)_\Delta \dots$$

$$(3) \gamma[0,2,4] \# \circ \delta[0,3,5].$$

$$(4) \varepsilon[1,2,4] \# \circ \kappa[1,3,5].$$

(vgl. Fig. 57, 58).

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß sich (4) aus den übrigen ableiten läßt. Es existieren $\alpha[0,1,2,3], \beta[0,1,4,5], \varepsilon[1,2,4]$ und $\kappa[1,3,5]$. Wäre (4) falsch, so würde $\varepsilon \circ \kappa$ gelten, d.h. es gäbe ein 6 mit $1 \neq 6 - (\varepsilon, \kappa)$, woraus sich nach (M') infolge $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$ und κ die Beziehung $(0,4,5,6)_{\Delta}$ (vgl. Fig. 59) ergibt, was $(1,4,6)_{\neq} - (\beta, \varepsilon)_{\neq}$ bedeutet. Wenn man 0 mit 1, 2 mit 3 und 4 mit 5 zugleich vertauscht, gehen (1) und (3) entsprechend in (2) und (4) über und umgekehrt. Damit ist auch klar, daß (3) eine Folgerung der übrigen ist. Nun mögen (2), (3) und (4) gelten, aber nicht (1). Da $2 - \gamma \circ \delta$ bekannt ist, existiert 3^0 mit $3 \neq 3^0 - \delta$ und $\alpha^0[0,1,2,3^0]$. Es gibt $\kappa^0[1,5,7] \neq \kappa$. Nach dem bewiesenen ersten Teil gilt $\varepsilon \circ (\kappa, \kappa^0) - (1,5)$ entgegen L 1.11. . Also folgt (1) aus den übrigen, und (2) ebenfalls aufgrund der Symmetrie.

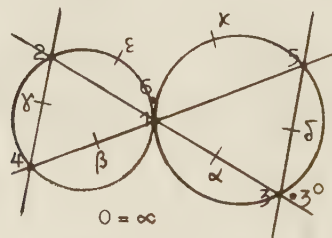


Fig. 57

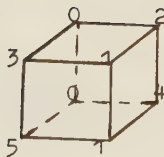


Fig. 58

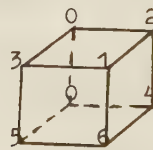


Fig. 59

L 5.7. Unter den Annahmen $(0,1,2,3,4,5)_\dagger$ und $(4, \alpha[0,1,2])_\phi$ läßt sich jede der folgenden Aussagen aus den anderen vier ableiten:

- (1) $(0,1,2,5)_\Delta$. (2) $(0,3,4,5)_\Delta$. (3) $(1,2,3,4)_\Delta$.
 (4) $\gamma[0,1,4] \circ \delta[1,2]$. (5) $\varepsilon[2,3,5] \circ \delta[1,2]$ (vgl. Fig. 60,61).

Beweis: Angenommen es gelten (1), (2), (3) und (4), aber nicht (5). Es gibt $\alpha[0,1,2,5]$, $\beta[0,3,4,5]$, $\chi[1,2,3,4]$ und ein 2^0 mit $(2,2^0)_\dagger - (\varepsilon, \delta)$. Infolge $\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma$ und δ gilt nach (M') $(1,2^0,3,4)_\Delta$ (vgl. Fig. 62), woraus der Widerspruch $(2,2^0,3)_\dagger - (\varepsilon, \chi)$ folgt. Wir haben also gezeigt, daß sich (5) aus den anderen ableiten läßt. Gelten (2), (3), (4) und (5), aber nicht (1), so konstruiere man $\alpha^0[0,1,5]$. Wegen $0 - \gamma \circ \delta$ existiert ein 2^0 mit $(\alpha^0, \delta) - (2,2^0)_\dagger$. Nach dem eben bewiesenen Teil ist $\delta[1,2^0] \circ \varepsilon[2^0,3,5]$ zu folgern und somit der Widerspruch $(2,2^0)_\dagger - (\delta, \varepsilon)$. Der Widerspruch wird aufgehoben, wenn (1) aus (2), (3), (4) und (5) folgt. Vertauschen wir zugleich 3 mit 5 und 4 mit 0, so geht (1) in (3) und bleiben (2), (4), (5) invariant. Vertauschen wir 0 mit 5, 1 mit 2 und 3 mit 4, so bleiben (1), (2), (3) invariant und geht (4) in (5) über und umgekehrt. Deswegen bleibt uns für den vollständigen Beweis des Lemmas nur noch zu zeigen, daß (2) aus den übrigen folgt. Würden (1), (3), (4) und (5), aber nicht (2) gelten, so konstruierte man $\beta^0[0,3,5]$. Um zu zeigen, daß $\beta^0 \circ \gamma$ unmöglich ist, konstruiert man ein $\pi[0,2,3]$. Es existiert ein 6 mit $6 - (\delta, \pi)$. Man konstruiert $\beta[0,1,6]$. Wegen L 5.6. gilt $\beta \circ \beta^0$, was nach L 1.11. $\beta^0 \circ \gamma$ nicht zuläßt. Es existiert also ein 4^0

mit $(0,4^0)_+ - (\gamma, \beta^0)$. Wenden wir den bewiesenen Teil an, daß nämlich (3) aus den übrigen folge, erhalten wir $(1,2,3,4^0)_\Delta$ (vgl. Fig. 63). Damit ist ein Widerspruch vorhanden, nämlich $\mathcal{K}[1,2,3,4] \neq \mathcal{K}^0[1,2,3,4^0]$.

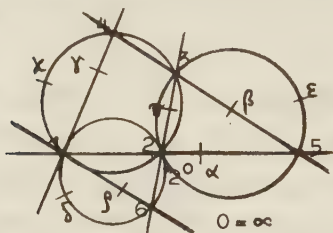


Fig. 60

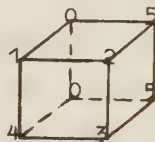


Fig. 61

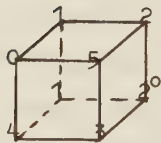


Fig. 62

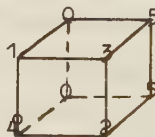


Fig. 63

Für die spätere Algebraisierung der Lieebenen ist es zweckmäßig, an dieser Stelle eine spezielle Form von (M) anzugeben:

D 5.5. $(M(P))$ In einem vorgegebenen Bezugssystem $[0, \mathcal{K}]$ gilt (M) unter der Einschränkung, daß die acht in der Voraussetzung gegebenen Elemente Punkte bzgl. $[0, \mathcal{K}]$ sind.

Wir können hier ohne den recht trivialen Beweis den folgenden Satz angeben:

S 5.4. Alle in diesem Paragraphen aufgestellten Lemmata und Sätze gelten auch in jeder Lieebene mit $(M(P))$ unter der Voraussetzung, daß die durch Ziffern dargestellten Elemente Punkte sind. Außerdem sind (M) und $(M(P))$ in jeder homogenen $[L]$ -Ebene äquivalent.

§ 6 Die Geometrien $K(\mathbb{K})$, Char $\mathbb{K} \neq 2$

Das Ziel dieses Paragraphen ist, mit Hilfe der in D 6.2. definierten linearen Berührgruppe $B(*)$ die Geometrie $K(\mathbb{K})$, Char $\mathbb{K} \neq 2$, zu untersuchen, um diese Geometrie als Liemenge mit (M) zu erkennen. Man weist leicht nach, daß $K(\mathbb{K})$ keine Liemenge ist im Falle Char $\mathbb{K} = 2$, nämlich (L2) ist nicht erfüllt.

Zuerst geben wir ohne Beweis an:

L 6.1. Folgende Elemente bilden eine s-Figur $(1,2,3,4,5)_s$ bzw.

eine t-Figur $(1,2,3,4,6)_t$:

$$1^T = (0,0,0,1,1), 2^T = (0,0,0,-1,1), 3^T = (0,0,-1,0,1),$$

$$4^T = (1,1,0,0,0), 5^T = (1,-1,0,0,0), 6^T = (1,0,-1,0,0).$$

(1^T usw. soll der Transponierte des Spaltenvektors 1 usw. heißen).

D 6.1. Die in L 6.1. ausgezeichnete s-Figur $(1,2,3,4,5)_s$ bzw. t-Figur $(1,2,3,4,6)_t$ heißt die Grund-s-Figur bzw. Grund-t-Figur. Alle in L 6.1. genannten Zuordnungen sollen auch später gelten. Bis auf diese Ausnahmen bedeuten die Ziffern nur noch Körperelemente. Ebenso bis auf diese Ausnahmen bezeichnen wir die Elemente der Geometrie $K(\mathbb{K})$ durch deutsche Kleinbuchstaben. Lateinische Kleinbuchstaben werden als Körperelemente benutzt.

D 6.2. Die linearen Projektivitäten A des 4-dimensionalen projektiven Raumes über dem Körper $\mathbb{K}$, die die Beziehung $A^T * A = *$ erfüllen, bilden offenbar eine Untergruppe $B(*)$ der berührtreuen Transformationen. Diese Untergruppe wird die lineare Berührgruppe genannt. Ihre Elemente bezeichnen wir mit lateinischen Großbuchstaben A, B, ...

L 6.2. Jede t-Figur $(a, b, c, d, n)_t$ mit der Existenz von

$w = \sqrt{(-2)(a \star b)(a \star c)(b \star c)} \neq 0$ kann in eine andere mit der entsprechenden Existenz überführt werden. $B(\star)$ ist scharf transitiv auf t-Figur.

Beweis: Sei $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ eine Berührtransformation, die die Grund-t-Figur in $(a, b, c, d, n)_t$ abbildet. Es muß dann gelten:

$$\begin{aligned} 1^A &= a_3 + a_4 = a a & a_0 &= \frac{1}{2}(a a + b b) - c c + e n \\ 2^A &= -a_3 + a_4 = b b & a_1 &= d d - \frac{1}{2}(a a + b b) + c c - e n \\ 3^A &= -a_2 + a_4 = c c, \text{ woraus} & a_2 &= \frac{1}{2}(a a + b b) - c c & \text{folgt.} \\ 4^A &= a_0 + a_1 = d d & a_3 &= \frac{1}{2}(a a - b b) \\ 6^A &= a_0 - a_2 = e n & a_4 &= \frac{1}{2}(a a + b b) \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun unter Anwendung von $A^T \star A = \star$ die Koeffizienten a, b, c, d, e . Das Resultat lautet:

$$a = \frac{2 b \star c}{w}, \quad b = \frac{2 a \star c}{w}, \quad c = \frac{a \star b}{w}, \quad d = \frac{-(a \star b)(c \star n)}{w(a \star n)}, \quad e = \frac{w}{(a \star b)(c \star n)}.$$

Also existiert A und ist eindeutig, da das Vorzeichen von w für die Projektivität keine Bedeutung hat. Zu A existiert sein Inverses A^{-1} . Damit kann jede t-Figur mit dem entsprechenden w durch geeignetes $A^{-1}B$ eindeutigerweise in eine andere abgebildet werden.

L 6.3. $B(\star)$ ist einfach transitiv.

Beweis: Die Lie-Inversion (vgl. Blaschke [5], S. 210) I:

$w^I = \frac{-(x^T + y^T) \star x}{x^T \star y} (x + y) + 4b$, ist offenbar eine lineare Berührtransformation¹⁰⁾. $B(\star)$ ist also bzgl. zweier sich nicht

10) Zu vorgegebenem $x + y$ kann man anstelle von x, y 1, 2, 3, 4, 6 nacheinander einsetzen, um $1^I, 2^I, 3^I, 4^I, 6^I$ zu bestimmen, und damit, wie in L 6.2. gezeigt, I explizit ausdrücken.

berührender Elemente γ und γ einfach transitiv. Im Falle $\gamma-\gamma$ zeigen wir, daß sich γ (damit analog auch γ) in 4 (selbstverständlich umkehrbar) abbilden läßt. Im Falle $\gamma-4$ wollen wir entweder ein γ finden, das weder 4 noch γ berührt, oder versuchen, L 6.2. zu benutzen, je nachdem, ob $\gamma-5$ gilt oder nicht. Im Falle $\gamma-5$ hat man zu unterscheiden, ob $\gamma \in (1,2,3)$ gilt. Ist es der Fall, so sei o.B.d.A. $\gamma=3$ (für $\gamma=1$ bzw. $\gamma=2$ sei $\gamma^T=(1,0,-1,-1,1)$ bzw. $\gamma^T=(1,0,-1,1,1)$). Dann ist 6 das gesuchte γ , da $4+6$ gilt. Ist aber $\gamma \notin (1,2,3)$, so gilt wegen $(4,5,6;1,2)_S$ (daß dies eine s-Figur ist, kann leicht nachgewiesen werden) ebenfalls $\gamma+6+4$. Im Falle $\gamma+5$ weist man nach, daß γ höchstens eines der Elemente $1,2,3$, $\alpha^T=(0,0,1,0,1)$ berührt. Gilt $\gamma+(1,2)$ (bzw. $\gamma+(3,\alpha)$), so existiert $(1,2,\gamma;4,5)_t$ (bzw. $3,\alpha,\gamma;4,5)_t$. Man erhält $w=+2x_2$ (bzw. $w=+2x_3$). Gemäß L 6.2. sind wir hier imstande, γ in 3 abzubilden. Weiter geht man wie im oben schon erledigten Fall $\gamma=3$ vor, um γ durch zwei weitere Lie-Inversionen in 4 abzubilden.

Wir sprechen im folgenden nicht mehr von w , obwohl wir bei jeder Transformation auf seine Existenz achten müssen.

L 6.4. Zwei sich berührende Elemente können in zwei entsprechende überführt werden.

Beweis: Man braucht nur zu zeigen, daß in $B(*)$ eine Abbildung existiert, die zwei beliebig vorgegebene $\gamma-\gamma$ in $4-3$ überführt. Nach L 6.3. gibt es $A \in B(*)$ mit $\gamma^A=4$. Im Falle $\gamma^A=3$ ist unser Ziel erreicht. Im Falle $\gamma^A=1$ oder 2 verwendet man die Abbildung von $(3,2,1;4,\alpha)_t$ mit

$a^T = (1, 0, -1, -1, 1)$ bzw. die von $(1, 3, 2, 4, 4)_t$ mit $b^T = (1, 0, -1, 1, 1)$ auf die Grund-t-Figur, um $\mathcal{Y}$ schließlich in $\mathfrak{Z}$ zu überführen. Im Falle $\mathcal{Y}^A(1, 2, 3)$ hat man zu unterscheiden, ob $\mathcal{Y}^A - 5$ gilt oder nicht. Ist es der Fall, so gilt $6 + \mathcal{Y}^A$, wie man durch Ausrechnen bestätigen kann. Wir bilden also $(1, 2, \mathcal{Y}^A, 4, 6)_t$ in die Grund-t-Figur ab. Ist es nicht der Fall, beachte man, daß $\mathcal{Y}^A$ höchstens eines der Elemente $1, 2, 3, \mathfrak{Z}^T = (0, 0, 1, 0, 1)$ berührt. Im Beweis zu L 6.3. haben wir schon erkannt, wie man in diesem Falle $\mathcal{Y}^A$ in $\mathfrak{Z}$ abbildet, wobei 4 invariant bleibt.

D 6.3. Wir schreiben $(a, b, c, \dots)_\mathcal{V}$ für den Fall, daß $a, b, c, \dots$ linear abhängig sind, und $(a, b, c, \dots)_\mathcal{V}$ für seine Negation.

L 6.5. $(a, b, c)_\mathcal{V}$ und $(a, b, c)_-$ sind äquivalent.

Beweis: Aus $c = aa + bb$ und $a^T * a = b^T * b = c^T * c = 0$ folgt $a^T * b = 0$, d.h. $a - b$. Analog gelten $b - c$ und $c - a$. Für die Umkehrung bildet man nach L 6.4. $a - b$ in $4 - \mathfrak{Z}$ ab. Man zeigt leicht, daß die Elemente, die $\mathfrak{Z}$ und 4 berühren, linear abhängig sind, damit auch $(a, b, c)_\mathcal{V}$. Denn die Linearität und die Berührung sind Invarianten in $B(*)$.

L 6.6. Zu $(a, b)_- + c$ existiert genau ein $\mathcal{J}$ mit $\mathcal{J} - (a, b, c)$.

Beweis: Es gilt für beliebige a und b aus $\mathbb{K}$ $aa + bb \in K(\mathbb{K})$. Nach L 6.5. ist dann $\mathcal{J} = aa + bb$ mit $\frac{a}{b} = \frac{-\mathcal{J} * c}{a * c}$ eindeutig das Gesuchte.

L 6.1. und L 6.6. besagen mehr, als daß $K(\mathbb{K})$ eine Berührmenge ist.

L 6.7. Zu $(a, b)_+ - c$ existiert kein von c verschiedenes Element, das a, b und c zugleich berührt.

Beweis: Angenommen es wäre $c \neq g - (a, b, c)$ möglich. Nach L 6.5. gelten $g = aa + cc$ und $d g = b b + c c$, woraus der Widerspruch $a^T b = 0$ (wegen $d g^T g = 0$) folgt.

Damit gilt L 1.1. in $K(\mathbb{K})$.

L 6.8. Zu $(a, b)_+ - g$ existiert ein c mit $(a, b, c)_+ - g$.

Beweis: Nach L 6.4. existiert $A \in B(*)$ mit $a^A = 1$ und $g^A = 4$.

Da wegen L 6.7. $b^A - (2, 3)$ unmöglich ist, kann entweder das Urbild von 2 oder das von 3 das Gesuchte sein.

(L1) ist also bestätigt.

L 6.9. Zu $(a, b)_+ - c$ existiert ein g mit $(a, b) - (c, g)_+$.

Beweis: Man erhält mit einem $A \in B(*)$ $a^A = 1$ und $c^A = 4$.

Das Problem ist nur dann noch nicht gelöst, wenn $b^A + 5$ gilt. Gemäß L 6.6. gibt es ein h mit $h - (1, 5, b^A)$. Das Urbild von h ist dann das Gesuchte g .

L 6.10. $B(*)$ ist bzgl. der 4 und 5 berührenden Elemente dreifach transitiv.

Beweis: Sei $(h, y, z) - (4, 5)$ und o.B.d.A. $h \neq 3$. A, B bzw. C soll $(1, 2, h, 4, 6)_t$, $(3, y^A, a; 4, b)_t$ (oder $(3, y^A, 1; 4, 6)_t$ im Falle $y^A = a$) bzw. $(1, 2, z^{AB}; 4, 6)_t$ in die Grund-t-Figur abbilden, wobei $a^T = (0, 0, 1, 0, 1)$ ist, und b existiert, weil $(3, a, y^A)_\downarrow$ (bzw. $(3, 1, y^A)_\downarrow$) gilt. Man kann also (h, y, z) durch ABC in $(1, 2, 3)$ überführen, was zu beweisen war.

L 6.11. $B(*)$ ist $(a, b)_+ - c$ transitiv.

Beweis: Wir zeigen, daß (α, β, γ) in $(1, 2, 4)$ abbildbar ist. Es gibt $\mathfrak{J}$ mit $(\alpha, \beta) - (\gamma, \mathfrak{J})_+$. Man bildet durch A α und γ in 1 bzw. 4 ab. Es bestehen nun zwei Möglichkeiten, nämlich $\mathfrak{J}^A - (2, 3)$ oder nicht. Aus dem Falle $\mathfrak{J}^A - (2, 3)$ ergibt sich $\mathfrak{J}^A = 5$. Somit ist gemäß L 6.10. die Abbildung (α, β, γ) in $(1, 2, 4)$ vorhanden. Für den anderen Fall sei o.B.d.A. $2 + \mathfrak{J}^A$ angenommen. Hier wird die Abbildung von $(1, \beta^A, 2, 4, \mathfrak{J}^A)_t$ in die Grund-t-Figur genommen, um unser Ziel zu erreichen.

L 6.12. Zu $(\alpha, \beta, \gamma) - \mathfrak{J}$ existiert $(\alpha, \beta, \gamma, \mathfrak{J}, \mathfrak{H})_t$, und es gilt $w = \sqrt{(-2)(\alpha^T \beta^T)(\alpha^T \gamma^T)(\beta^T \gamma^T)} \neq 0$.

Beweis: Wegen L 6.11. erhält man durch $A \in B(*)$ $\alpha^A = 1$, $\beta^A = 2$ und $\mathfrak{J}^A = 4$. Nach L 6.9. existiert ein $\mathfrak{f}$ mit $(4, \mathfrak{f})_+ - (1, 2)_+$. Dann kann man das Urbild von $\mathfrak{f}$ im Falle $\gamma^A + \mathfrak{f}$ als $\mathfrak{H}$ betrachten. Im Falle $\gamma^A - \mathfrak{f}$ wird $1 - (4, \mathfrak{f})$ durch $B \in B(*)$ in $1 - (4, 5)$ abgebildet. Wenn man nun gemäß L 6.10. $(\alpha^{AB}, \beta^{AB}, \gamma^{AB})$ in $(1, 2, 3)$ überführt, ist die Existenz von $\mathfrak{H}$ erkennbar, und es gilt $\mathfrak{H}^{ABC} = 6$, wobei C die letzte angegebene Abbildung ist. Damit ist $w \neq 0$ auch offenbar richtig.

Hiermit ist (L2) nachgewiesen. Genauer gesagt folgt (L2) aus L 6.12., L 6.2. und L 6.1.. Nach den gezeigten Lemmata ist die Gruppe $B(*)$ nicht nur scharf t-Figur transitiv, sondern auch transitiv bis auf t-Figuren; darunter versteht man, daß jede Konfiguration, die kleiner (einschließlich gleich) als eine t-Figur ist, in eine beliebige Entsprechende abgebildet werden kann.

L 6.13. Für zwei Dipole α und β folgt $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')_{\Delta}$ aus

$(\alpha, \alpha', b, b')_{\nabla}$ und weiterhin dies aus $\alpha \approx \beta$. Die Umkehrung gilt nur, wenn sich mindestens zwei der vier Elemente berühren.

Beweis: Im Falle $\alpha \approx \beta$ ist die Aussage trivial. Sonst gilt nach S 1.5. $\alpha \approx \beta$ oder $\alpha \circ \beta$, da $K(\mathbb{K})$ eine Liemenge ist. Im Falle $\alpha \neq \beta$ folgt $(\alpha, \alpha', b, b')_{\nabla}$ aus $(\alpha, b, \eta)_{\nabla}$ und $(\alpha', b', \eta)_{\nabla}$, wobei η mit $\eta - (\alpha, \beta)$ nach D 0.8. existiert. Im Falle $\alpha \circ \beta$ bildet man α, α', b in 1,2,3 ab und bestätigt die lineare Abhängigkeit. Daraus folgt offenbar die starke Abhängigkeit. Die Umkehrung gilt im Falle $\alpha - b$. Denn L 6.6. sichert $(\alpha, \alpha', b)_0$, woraus sich $\alpha \circ \beta$ wegen der starken Abhängigkeit ergibt. Als Gegenbeispiel dafür, daß die lineare Abhängigkeit nicht hinreichend für das Verbundsein ist, nehmen wir $\alpha=1$, $\alpha'=2$, $b^T=(1,0,0,1,0)$ und $b'^T=(1,0,0,-1,0)$. Das Beispiel für $(\alpha, \alpha', b, b')_{\Delta \nabla}$ ist vom gewählten Körper abhängig. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen) kann man $\alpha=1$, $\alpha'=2$, $b^T=(1,0,0,1,0)$ und $b'^T=(1,1,1,0,1)$ nehmen (es gilt $(\alpha, \alpha', b, b')_{\exists \Phi}$).

L 6.14. Es gilt (V).

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $(\alpha, \alpha', b, b')_{\nabla}$ und $(b, b', c, c')_{\nabla}$, woraus sich $(\alpha, \alpha', b, c, c')_{\nabla}$ ergibt, d.h. b ist eine Linearkombination aus α, α', c, c' . Da ein η mit $\beta + \eta - (\alpha, \gamma)$ existiert, erhält man den Widerspruch $b^T \eta = 0$ im Falle $(\alpha, \alpha', c, c')_{\nabla}$. Damit ist $(\alpha, \alpha', c, c')_{\Delta}$ gesichert.

L 6.15. Es gilt (M).

Beweis: Wegen der t-Figur-Transitivität seien drei der acht vorgegebenen Elemente 4,5, und $\alpha^T=(1,0,0,1,0)$, und die anderen b, c, d, n und f (vgl. Fig. 64, 65), wobei $1-(4,5, c, d)$ gilt. Zu zeigen ist also $(c, d, n, f)_{\nabla}$ aus

D 6.4. (Ta) Es gibt eine Untergruppe U der Berührgruppe derart, daß $(a, b, c, d, n)_t$ in $(a, b, f, n, g)_t$ eindeutig überführbar ist und daß diese Abbildung bzgl. alle a, b berührenden Elemente involutorisch ist.

S 6.2. Es gilt (Ta) mit $U=B(*)$.

Beweis: Man bildet mit Hilfe der scharfen t-Figur-Transitivität der Gruppe $B(*)$ $(a, b, c, d, n)_t$ durch B in die Grund-t-Figur und weiterhin diese durch C in $(1, 2, 4, 6, 4)_t$. Hier kann $\sqrt[4]{}$ nach Ausrechnen nur die Form $(1, x, -1, y, \pm \sqrt{x^2+y^2})$ oder $(0, 1, 0, y, \pm \sqrt{1+y^2})$ besitzen. Es gilt entsprechend

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} & \frac{-1}{1-x} & \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-x} & \frac{-1}{1-x} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x} & 1 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{y}{x} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x} \end{pmatrix}$$

oder

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1+y^2} & -y \\ 0 & 0 & 0 & -y & -\sqrt{1+y^2} \end{pmatrix}$$

Man zeigt leicht, daß

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ausgenommen $y=0$) gilt. D.h. C ist involutorisch bzgl. alle 1 und 2 berührenden Elemente. Die gesuchte Abbildung ist dann $B^{-1}CB$.

Ist $K(\mathbb{K})$ eine Liebene, so seien a, b, c und f Punkte. In diesem Fall induziert die Abbildung $(a, b, c, g, n)_t$ in $(a, b, f, n, g)_t$ eine einfach transitive Kreisverwandtschaft (weil alle a und b berührenden Elemente involutorisch sind, bildet der Kreis durch a, b, f in den durch a, b, c ab $- f$ geht im allgemeinen nicht in c über.) Dadurch wird gesichert, daß die Bilder der Punkte wieder Punkte sind mit zwei Fixpunkten. Damit erreicht man offenbar eine Gruppe ireifach transitiver Kreisverwandtschaften.

L 6.16. In $K(\mathbb{K})$ folgt (S3) aus (UV).

Beweis: Seien $(a, b, n)_\phi$ und $c = (a, b)$. Man findet ein f mit $(c, n) - f + (a, b)$ und ferner ein g mit $g = (a, b, f)$. Es gilt $(c, g, n; f, a)_t$. Damit ist (S3) wegen der t -Figur-Transitivität gesichert, denn jede s -Figur kann einer t -Figur zugeordnet werden und diese ist in $(c, g, n; f, a)_t$ abbildbar. So erfüllen die Urbilder von (a, b, n) (S3).

L 6.17. In $K(F_3)$ gelten (UV) und somit (S3) aber nicht (L3), (ZG), (P) und (H).

Beweis: Man findet leicht drei unverbindbare Elemente

(s.u.). Nach L 1.16. gilt also auch (S3). Man verifiziert, daß genau nur 1,2,3 und $\alpha^T = (0,0,1,0,1)$ die Elemente 4 und 5 berühren. Damit ist (L3) widerlegt. Entgegen (ZG) sind hier diese vier Elemente paarweise getrennt. Sei ein beliebiges Bezugssystem $[k, \kappa]$ gegeben. Wir zeigen, daß es drei Punkte gibt, die unverbindbar sind. Es existiert η mit $\eta - \kappa$. Gemäß L 6.11. ist ein $A \in B(*)$ mit $k^A = 4$, $\kappa^A = 5$ und $\eta^A = \alpha$ vorhanden. Sei $\mathfrak{J} = k^A$. Hier ist nur $d_0 = 0$ zusammen mit $d_1 = 1$ zulässig. (Zu 4,5 existieren sechs verschiedene $\mathfrak{J}$ mit $(4,5,\mathfrak{J})_\phi$). Im Falle $d_4 = 0$ bzw. $d_4 + 0$ gilt $(3,\alpha,\mathfrak{J})_\phi$ bzw. $(1,\alpha,\mathfrak{J})_\phi$. D.h. (P) gilt nicht, (H) kann damit wegen (UV) und L 4.7. nicht gelten.

L 6.18. In $K(\mathbb{R})$ gilt (P), wenn $\mathbb{R}$ pythagoreisch ist.

Beweis: Als Bezugssystem nehmen wir $[5, \kappa]$ mit

$k^T = (0,1,0,0,1)$ und $\kappa^T = (0,1,0,0,-1)$. Man erkennt, daß die Punkte η auf κ die Form $\eta^T = (1,0,x_2,x_3,0)$ besitzen.

Nun wollen wir zuerst zeigen, daß jeder Punkt $\mathfrak{J}$ durch $p_4 = 0$ gekennzeichnet ist. Nach Definition ist zu $\mathfrak{J}$ ein Dipol α vorhanden mit $\alpha \circ \kappa$. Gilt $\alpha \circ \kappa$, so existiert nur ein Punkt η mit $(\alpha, \kappa) - \eta^T = (1,0,x_2,x_3,0)$, woraus man $\alpha^T = (1,-1,x_2,x_3,-1)$ und $\alpha'^T = (1,-1,x_2,x_3,1)$ ableitet. Es gibt η mit $\alpha - \eta^T = (-\frac{1+x_2^2}{x_2^2}, 1, 0, -\frac{2x_3}{x_2^2}, 0) + 5^T$. Ist $\mathfrak{J} = \eta$, so gilt $p_4 = 0$. Sonst gilt $(5, \eta, \mathfrak{J})_+ - \alpha$, was es gemäß

S 6.1., L 1.12. und L 6.13. ermöglicht, $\mathfrak{J}$ als Linearkombination von 5, η und η darzustellen, woraus sich gerade $p_4 = 0$ ergibt. Im Falle $\alpha \circ \kappa$ existieren η und η mit $x_4 = y_4 = 0$ und $(\eta, \eta) - (\alpha, \kappa)$, woraus sich ebenfalls wegen L 6.13. $p_4 = 0$ ergibt. Wir brauchen hier nicht zu wissen, ob alle η mit $q_4 = 0$ Punkte in $[5, \kappa]$ sind. Wir

zeigen aber, daß beliebige drei Elemente γ, η und ζ mit $x_4=y_4=z_4=0$ verbindbar sind. Man ordnet jedem η mit $q_4=0$ das geordnete Zahlenpaar $(\frac{q_2}{q_0+q_1}, \frac{q_3}{q_0+q_1})$ zu (im Falle $q_0=-q_1$ wird der uneigentliche Punkt " ∞ " zugeordnet). Diese Zuordnung ist eineindeutig unter der Bedingung $q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. In einer affinen Ebene über einem pythagoreischen Körper kann man aber zu zwei beliebigen bzw. drei nicht kollinearen Punkten genau zwei Speere bzw. zwei Zyklen im gewöhnlichen Sinne konstruieren, die die gegebenen Punkte berühren. Jedem in dieser Weise konstruierten Speer bzw. Zyklus entspricht aber nach der klassischen Zuordnung¹¹⁾ stets eindeutigweise ein Element in $K(\bar{k})$, das γ, η und ζ bzw. γ, η und ζ berührt. Damit sind drei beliebige Punkte bzgl. $[5, K]$ sicher verbindbar.

L 6.19. In $K(\bar{k})$ gilt (EP), wenn $\bar{k}$ pythagoreisch ist.

Beweis: $5, k^T = (0, 1, 0, 0, 1)$ und $k^T = (0, 1, 0, 0, -1)$ bilden ein Bezugssystem. Ein beliebiges γ , das 4 und 5 berührt, besitzt die Form $\gamma^T = (0, 0, x_2, x_3, 1)$. Es gibt η, ζ mit $\eta^T = (1, 0, x_2, x_3, 0)$, $\zeta^T = (1, 0, -x_2, -x_3, 0)$, die $(\gamma, \zeta) - (\gamma, k)$ erfüllen. D.h. 4 ist in $[5, K]$ ein elliptischer Punkt bzgl. K .

11) Unter klassischer Zuordnung versteht man die in Blaschke [5], Seite 179, erklärte; dabei muß es allerdings in der neunten Zeile statt "positiv oder negativ" "negativ oder positiv" heißen.

Zusammenfassend gilt

S 6.3. Die Geometrie $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pythagoreisch, ist eine $[L]$ -Ebene mit (M) , $(S3)$ und (EP) .

L 6.20. In $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ euklidisch, sind $(\alpha, \ell, \epsilon)_{+0}$ und $(\alpha^T * \ell)(\alpha^T * \epsilon)(\ell^T * \epsilon) < 0$ äquivalent. Somit gilt auch (S).
 Beweis: Daß $(\alpha^T * \ell)(\alpha^T * \epsilon)(\ell^T * \epsilon) < 0$ aus $(\alpha, \ell, \epsilon)_{+0}$ folgt, ist wegen der Transitivität bis auf t-Figuren richtig. Es gilt nämlich $(1^T * 2)(2^T * 3)(3^T * 1) = |A|^6 (\alpha^T * \ell)(\alpha^T * \epsilon)(\ell^T * \epsilon)$, wobei $A(\alpha, \ell, \epsilon)_{+0}$ in $(1, 2, 3)$ abbildet. Für die Umkehrung führen wir (α, ℓ) in $(4, 5)$ über. Das Bild von ϵ sei $\mathfrak{J}$. Man braucht für das Lemma nur noch zu zeigen, daß $(4, 5, \mathfrak{J})_{+0}$ aus $\frac{4^T * 5}{(4^T * \mathfrak{J})(5^T * \mathfrak{J})} < 0$ folgt. Aus der Tatsache $4^T * 5 < 0$ folgt $(4^T * \mathfrak{J})(5^T * \mathfrak{J}) > 0$ und darüber hinaus $d_0^2 > d_1^2$. Wir wissen andererseits, daß jedes 4 und 5 berührende γ die Form $\gamma^T = (0, 0, x_2, x_3, 1)$ besitzt. Nach Ausrechnen stellt man fest, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von γ mit $\gamma - (4, 5, \mathfrak{J})$ gerade $d_2^2 + d_3^2 > d_4^2$, d.h. $d_0^2 < d_1^2$ ist.

D 6.5. Das geordnete 4-Tupel $(\alpha, \ell, \epsilon, \mathfrak{J})_e$ heißt eine e-Figur, wenn $(\alpha, \ell, \epsilon)_\phi$ und $(\alpha, \ell) - \mathfrak{J}$ gelten.

L 6.21. Die lineare Berührgruppe $B(*)$ von $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ euklidisch, ist e-Figur transitiv.

Beweis: Die Transitivität bis auf t-Figuren ermöglicht uns, o.B.d.A. $\alpha = 6$ und $\ell^T = (1, 0, 1, 0, 0)$ zu wählen. Da $(\alpha, \ell, \epsilon)_\phi$ gilt, erhält man $c_0^2 < c_2^2$ (vgl. $d_0^2 > d_2^2$ in L 6.20.). Sei also im Folgenden o.B.d.A. $c_4 = 1$. Nach der Voraussetzung muß $\mathfrak{J}$ die Form $\mathfrak{J}^T = (0, d_1, 0, d_3, 1)$ mit

$d_1^2 + d_3^2 = 1$ besitzen. Man sucht nun alle $A \in B(\star)$, die $(\alpha, \beta, 3, 2)$ in $(\alpha, \beta, \tau, 3)$ abbilden. Durch Ausrechnen werden genau die folgenden zwei $A = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ als geeignet erkannt:

$$\alpha_0^T = \left(-\frac{c_2}{s}, 0, -\frac{c_0}{s}, 0, 0\right)$$

$$\alpha_1^T = \left(0, \frac{\begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ 1 & d_3 \end{vmatrix}}{t}, 0, -\frac{\begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix}}{t}, \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{t}\right)$$

$$\alpha_2^T = \left(-\frac{c_0}{s}, 0, -\frac{c_2}{s}, 0, 0\right)$$

$$\alpha_3^T = \left(0, \frac{c_1}{s} + \frac{d_1}{u}, 0, \frac{c_3}{s} + \frac{d_3}{u}, \frac{1}{s} + \frac{1}{u}\right)$$

$$\alpha_4^T = \left(0, \frac{c_1}{s}, 0, \frac{c_3}{s}, \frac{1}{s}\right)$$

$$\text{wobei } s = \pm \sqrt{c_2^2 - c_0^2}, \quad t = \pm \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ 1 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}^2} \quad \text{und}$$

$u = \frac{c_1 d_1 + c_3 d_3 - 1}{s}$ seien; die Vorzeichen von s und t sind voneinander unabhängig (aber es gibt nur zwei effektiv verschiedene A).

Als Folgerung von S 4.4., S 5.2., S 6.3. und L 6.21. gilt

S 6.4. Die Geometrie $K(\tilde{K})$, $\tilde{K}$ euklidisch, ist eine homogene $[L]$ -Ebene mit (M) , (S_3) und folglich mit (VM) , (L_4) , (EP) und (EHP) .

Für die Kennzeichnung der Lieebene in § 7 ist außer (Ta) noch die folgende Eigenschaft wichtig:

D 6.6. (Tb) In einer Untergruppe V der Berührgruppe ist

$(\alpha, b, c, d)_e$ in $(n, l, q, f)_e$ involutorisch überführbar, wobei $(\alpha, b) - (q, f)$ und $(c, d) - (n, l)$ gelten.

Diese Abbildung ist sogar eindeutig.

L 6.22. Es gilt (Tb), falls die Berührgruppe $B(*)$ e-Figurtransitiv ist.

Beweis: Wir können $\alpha=3$, $b^T=(0,0,1,0,1)$, $c=6$, $d=4$, $n=1$, $l=2$, $q^T=(\pm \sqrt{1+x^2}, x^2, 0, 1, 0)$ und $f=5$ setzen.

In diesem Falle ist die gesuchte Abbildung:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} & -x & 0 & 0 & 0 \\ x & \sqrt{1+x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß die andere Abbildung, die $(\alpha, b, c, d)_e$ ebenfalls in $(n, l, q, f)_e$ abbildet, nicht involutorisch ist.

Ist $K(\tilde{K})$ eine Lieebene und erfüllt ihre Berührgruppe die Eigenschaft (Tb), so ist hier eine dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften vorhanden. Der Beweis dieser an sich naheliegenden Behauptung wird wegen komplizierter Fallunterscheidungen weggelassen.

§ 7 Pythagoreische, euklidische und reelle Lieebenen

D 7.1. Eine Lieebene heißt pythagoreisch, euklidisch bzw. reell, wenn sie eine Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ mit $(\mathbb{L}:\mathbb{K})=2$ im Sinne von Benz [2] induziert, wobei $\mathbb{K}$ pythagoreisch, euklidisch bzw. reell ist.

Nach Benz [2] sind die Kreisebenen $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ mit $(\mathbb{L}:\mathbb{K})=2$ genau die von v.d.Waerden und Smid [11] gekennzeichneten Möbiusebenen.

L 7.1. Jede $[L]$ -Ebene mit $(M(P))$ und (EP) ist pythagoreisch.
 Beweis: Wegen $(M(P))$ gehört die induzierte Möbiusebene der $[L]$ -Ebene zu den von v.d.Waerden und Smid [11] gekennzeichneten Kreisebenen. In ihr werden die Punkte durch geordnete Paare und die geradenartigen Dipole, d.h. die Geraden, durch lineare Gleichungen und die kreisartigen Dipole, d.h. die Kreise, durch Quadriken mit festem Anfangsstück dargestellt. Die projektive Ebene über $\mathbb{K}$, die hier durch die in der Möbiusebene induzierte affine Ebene eindeutig bestimmt ist, besitzt wegen (EP) einen elliptischen Punkt im gewöhnlichen Sinne. Nach Bottema [6] ist $\mathbb{K}$ pythagoreisch.

L 7.2. Jede pythagoreische Lieebene ist eine Geometrie $\mathbb{K}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pythagoreisch.

Beweis: Nach Bottema [6] kann man das Koordinatensystem der pythagoreischen projektiven Ebene, die hier durch $\mathbb{K}$ von der Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ bestimmt ist, so wählen, daß mindestens ein Kreis der Möbiusebene die Gleichung eines gewöhnlichen Kreises besitzt. Nach v.d.Waerden und Smid [11] haben aber die Kreisgleichungen alle das gleiche quadratische Anfangsstück. Unter Verwendung der klassischen Zuordnung von Blaschke - diese gilt genau, wenn

der Körper pythagoreisch ist - sind nun alle Elemente der pythagoreischen Liebene in berührungstreuer Weise eindeutig auf eine Geometrie $K(\mathbb{K})$ abbildbar, wobei $\mathbb{K}$ aus der Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ stammt.

Als Zusammenfassung der Aussagen S 6.3., L 7.1. und L 7.2. gilt

S 7.1. Die folgenden Klassen von Geometrien können miteinander identifiziert werden:

- (1) Die pythagoreischen Lieebenen.
- (2) Die Geometrien $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pythagoreisch.
- (3) Die [L]-Ebenen mit (M) und (EP).

Man kann leicht andere Kennzeichnungen der pythagoreischen Lieebenen angeben, wenn man Ergebnisse aus der Theorie der Kreisebenen $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ verwendet. In einer späteren Arbeit des Verfassers wird $(M(P))$ durch den Satz von Miquel der Laguerre-Ebene bzw. gewisse Transitivität der Berührgruppe ersetzt. Außerdem wird dort gezeigt, daß wir anstelle von (EP) ein schwächeres Axiom nehmen können.

L 7.3. Jede homogene [L]-Ebene mit (M) (oder $(M(P))$) und (S3) ist euklidisch.

Beweis: Wie in L 7.1. ist die induzierte Möbiusebene eine Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ mit $(\mathbb{L}:\mathbb{K})=2$. Die projektive Ebene über $\mathbb{K}$ erfüllt wegen S 4.4. und Bottema [6] das E.P. Axiom, weswegen $\mathbb{K}$ euklidisch sein muß.

Analog zu Lemma L 7.2. gilt

L 7.4. Jede euklidische Lieebene ist eine Geometrie $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ euklidisch.

D 7.2. Eine Berührtransformation A heißt eine Dilatation um $O-\gamma$, wenn gilt: (1) $O^A = O - \gamma = \gamma^A$. (2) Aus $O-\gamma$ folgt

$\mathfrak{S}^A - \mathfrak{S}$. $\mathfrak{p}$ ist ein Fixpunkt um $O - \mathfrak{Y}$, wenn $\mathfrak{p} - \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{p}^A = \mathfrak{p}$ gilt. Die Dilatationen um $O - \mathfrak{Y}$ mit Fixpunkt $\mathfrak{p}$ heißen einfach transitiv, wenn zu $(O, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{u})_{+ - \mathfrak{Y}}$ eine Dilatation A existiert mit $\mathfrak{q}^A = \mathfrak{u}$.

S 7.2. Die folgenden Klassen von Geometrien können miteinander identifiziert werden:

- (1) Die euklidischen Lieebenen.
- (2) Die Geometrien $K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ euklidisch.
- (3) Die homogenen $[L]$ -Ebenen mit (M) und (S3).
- (4) Die verbundenen Liemengen mit den Eigenschaften (I4), (S3) und (VM).
- (5) Die $[L]$ -Ebenen, deren lineare Berührgruppe e-Figur und t-Figur transitiv ist und (Ta) und (Tb) erfüllt.
- (6) Die homogenen Lieebenen mit (S3), deren Dilatationen um ein gewisses Tripel $O - \mathfrak{Y}$ einen Fixpunkt besitzen und einfach transitiv und kommutativ sind.

Beweis: Nach S 6.4., L 7.3. und L 7.4. sind die Klassen (1), (2) und (3) - bis auf Isomorphie - identisch. Mit Hilfe von S 5.2. kann die Klasse 4 auch daran angeschlossen werden. Der Rest dieses Satzes wird in folgenden vier Lemmata bewiesen.

Infolge L 7.4., S 6.4., S 6.2., L 6.21. und L 6.22 gilt:

L 7.5. Jede euklidische Lieebene ist eine $[L]$ -Ebene der Klasse (5) in S 7.2..

Wir zitieren hier drei in Benz [3] gezeigte Aussagen. Erstens: In einer Möbiusebene im engeren Sinne mit einer dreifach transitiven Gruppe von Kreisverwandtschaften ist das abgeschwächte Axiom von Süß mit der Eigenschaft (T2) äquivalent (vgl. [3],

Satz 3.1.; (T2) kann man in folgenden Worten formulieren: Der Berührbüschel bleibt als Ganzes invariant, wenn einer der ihm angehörenden Kreise und der Grundpunkt - sie bestimmen genau einen Berührbüschel - in sich abgebildet werden). Zweitens: Aus der dreifachen Transitivität zusammen mit dem abgeschwächten Axiom von Süß folgt die scharf dreifache Transitivität (vgl. [3], Satz 3.2.). Eine Möbiusebene mit einer scharf dreifach transitiven Gruppe von Kreisverwandtschaften ist eine Möbiusebene im engeren Sinne, und es gibt ein Titsfeld $\bar{K}$ und eine quadratische Erweiterung $\mathbb{L}$ von $\bar{K}$ derart, daß die Punkte von der Möbiusebene mit $\mathbb{L} \cup \{\infty\}$ identifiziert werden können, und daß weiterhin jeder Kreis einer Teilmenge von $\mathbb{L} \cup \{\infty\}$ zugeordnet werden kann (vgl. [3], Satz 4.1.). Drittens: Das Titsfeld ist ein kommutativer Körper, wenn vier Punkte paarweise vertauschbar sind (vgl. Bemerkung zu 6.11. in [3]). In diesem Fall ist die Möbiusebene eine Kreisebene $(\bar{K}, \mathbb{L})$ mit $(\mathbb{L}:\bar{K})=2$.

L 7.6. Es gilt die Umkehrung von L 7.5.

Beweis: Jede berührtreue Transformation läßt jeden Berührbüschel als Ganzes invariant bleiben. Damit erfüllt ihre induzierte Kreisverwandtschaft (T2). Sowohl (Ta) als auch (Tb) gewährleistet (vgl. Bemerkung zu S 6.2. und zu L 6.22.) eine dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften. Liegen vier Punkte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ auf dem Kreis α , so sei $(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{D})$. Wegen (Ta) vertauscht die Abbildung, die $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{C})_t$ in $(\alpha, \mathcal{A}', \mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{D})_t$ überführt, $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{D}$. Liegen vier Punkte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ nicht auf einem Kreis, so gibt es $\alpha[\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}]$ und $\beta[\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}]$. Es gilt $(\alpha, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{C})_e$ und $(\beta, \mathcal{A}', \mathcal{C}, \mathcal{D})_e$. Wegen (Tb) sind $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{D}$ vertauschbar. Damit induziert die gegebene Liemenge infolge

der Bemerkung vor diesem Lemma eine Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ mit $(\mathbb{L}:\mathbb{K})=2$. Wegen der $(\alpha, \ell, c)_{\phi}$ -Transitivität - aus der e-Figur-Transitivität - ist sie homogen. Im Beweis von L 6.16. wurde (S3) aus der t-Figur-Transitivität abgeleitet. Dadurch muß $\mathbb{K}$ nach S 4.4. und [6] euklidisch sein, was zu beweisen war.

L 7.7. Jede euklidische Lieebene ist eine Lieebene der Klasse (6) in S 7.2.

Beweis: Die in der Lieebene induzierte Möbiusebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ sei so, daß γ eine Gerade bzw. 0 der uneigentliche Punkt und zugleich die Klasse der zu γ parallelen Gerade in der affinen Ebene über $\mathbb{K}$ ist. Nach E. Artin [1] existiert in jeder affinen Ebene über einem kommutativen Körper eine kommutative, einfach transitive Gruppe von Dilatationen - im gewöhnlichen Sinne - mit einem Fixpunkt. Diese gewöhnlichen Dilatationen sind in der vorgegebenen Lieebene genau die gewünschten Dilatationen um $0-\gamma$.

L 7.8. Es gilt die Umkehrung von L 7.7..

Beweis: Man nimmt eine induzierte Möbiusebene $\mathcal{M}$ aus der gegebenen homogenen Lieebene. Die vorausgesetzte Gruppe von Dilatationen induziert in der in $\mathcal{M}$ induzierten affinen Ebene $\mathbb{E}$ eine Gruppe von Dilatationen im gewöhnlichen Sinne, die nach Artin [1] einen kommutativen Koordinatenkörper $\mathbb{K}$ für $\mathbb{E}$ hervorruft. Wegen S 4.4. und [6] ist $\mathbb{K}$ euklidisch. Damit ist $\mathcal{M}$ eine Kreisebene $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$, $\mathbb{K}$ euklidisch, was zu beweisen war.

D 7.3. Eine Liemenge bzw. eine Lieebene heißt topologisch, wenn in ihr eine Topologie erklärt ist, derart, daß die Bil-

dung des Dipols α von dem Tripel $(\gamma, \eta, \zeta)_{+0}$ stetig sei, d.h. zur Umgebung $\mathcal{U}(\alpha)$ von α und Umgebung $\mathcal{U}(\alpha')$ von α' gibt es Umgebungen $\mathcal{U}(\gamma)$ von γ , $\mathcal{U}(\eta)$ von η und $\mathcal{U}(\zeta)$ von ζ derart, daß $\beta[u, v, w]$ in $\mathcal{U}(\alpha) \cap \mathcal{U}(\alpha')$ liegt für alle $u \in \mathcal{U}(\gamma)$, $v \in \mathcal{U}(\eta)$ und $w \in \mathcal{U}(\zeta)$.

S 7.3. Die klassische, d.h. die reelle Lieebene, ist isomorph zu einer der in S 7.2. angegebenen Geometrien zusammen mit einer der folgenden Eigenschaften:

(LK) Die Liemenge ist topologisch und außerdem lokal-kompakt.

(D) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Mengen von Elementen, die den Dipol γ berühren, und gibt es $(\alpha_0, b_0) \in \gamma$ derart, daß $(\alpha_0, b) / (\alpha, b_0)$ gilt für alle $\alpha \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, dann existiert ein $\mathcal{C}$ mit $(\alpha_0, \mathcal{C}) / (\alpha, b)$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$.

Beweis: Sei zunächst die klassische Lieebene gegeben. Sie ist, wie gezeigt, eine homogene [L]-Ebene. Sei $\mathcal{M}$ eine in ihr induzierte Möbiusebene und γ eine Gerade einer in $\mathcal{M}$ induzierten affinen Ebene $\mathcal{E}$. Dann gilt (D), weil $\mathcal{E}$ das Dedekindsche Axiom erfüllt. Sei eine Topologie wie gewöhnlich in der klassischen Lieebene erklärt. So gilt (LK). Denn sonst würde zumindest eine induzierte affine Ebene zu der reellen nicht isomorph sein. Damit ist gezeigt, daß die klassische Lieebene eine der in S 7.2. angegebenen Geometrien mit der Eigenschaft (D) oder (LK) ist. Wir kommen nun zum Beweis der Umkehrung. Unter Mitwirkung von (H) besagt (D) in der betreffenden induzierten affinen Ebene fast dasselbe wie das Axiom von Dedekind. Der Unterschied besteht nur darin,

daß in (D) nicht explizit erlangt wurde, daß der Punkt λ auf der Geraden γ liegt. Wegen S 1.6. gilt aber $\lambda - \gamma$, somit auch das Axiom von Dedekind. Die betreffende induzierte affine Ebene ist also reell. D.h. der Körper von der Kreisebene $(\tilde{K}, \tilde{L})$ ist reell, was zu beweisen war, nämlich: jede in S 7.2. angegebene Geometrie zusammen mit (D) ist eine klassische Lieebene. Gegeben sei nun eine euklidische Lieebene mit (LK). Jede in ihr induzierte affine Ebene ist dann auch euklidisch, topologisch und außerdem lokalkompakt. Der Koordinatenkörper $\tilde{K}$ ist also stetig. Aus "euklidisch" folgt, daß $\tilde{K}$ angeordnet sein muß - damit auch $\text{Char } \tilde{K} = 0$ -. Wegen "topologisch und außerdem lokalkompakt" kann der angeordnete Körper unter Anwendung von Satz 22 in L.S.Pontrjagin [10] nur noch der reelle sein. Damit ist die gegebene Liemenge zu der klassischen Lieebene isomorph.

Die klassische Lieebene ist nicht nur, wie gezeigt, zu einer der in S 7.3. angegebenen Geometrien isomorph, sondern auch homöomorph. Denn alle diese Geometrien sind topologische Lieebenen, die lauter reelle affine Ebenen induzieren. Wären sie nicht stetig isomorph, so würde es reelle affine Ebenen mit der natürlichen Topologie geben, die zueinander nicht homöomorph sind. Man kann in S 7.3. anstelle von "isomorph" "stetig isomorph" schreiben.

Schließlich sei zu bemerken, daß es möglich ist, aus einer Geometrie, die etwas allgemeiner als die in S 7.2. angegebenen ist, aber mit der Voraussetzung (D) oder (LK), eine reelle Lieebene zu machen. Als Beispiel darf die Kommutativität der Gruppe

der Dilatationen in S 7.2.(6) weggelassen werden. Denn jede zyklisch geordnete desarguessche projektive Ebene, die das Dedekindsche Axiom erfüllt, ist zur reellen isomorph (vgl. z.B. A. Heyting [9]).

L i t e r a t u r

- [1] Artin, E.: Geometric Algebra. New York 1965.
- [2] Benz, W.: Über Möbiusebenen. Jber.Deutsch.Math.Verein. 63 (1960), 1-27.
- [3] Benz, W.: Über Winkel- und Transitivitätseigenschaften in Kreisebenen. I, II. J. Reine Angew. Math. 205 (1960), 48-74 und 207 (1961), 1-15.
- [4] Benz, W.: Die Gruppe der Lietransformationen in der ebenen Geometrie von Lie über einem Körper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 29 (1966), 197-211.
- [5] Blaschke, W.: Vorlesung über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.
- [6] Bottema, O.: Zur Axiomatik der projektiven Geometrie. Monatsh. Math. Phys. 47 (1938), 234-239.
- [7] Crampe, S.: Angeordnete projektive Ebenen. Math. Z. 69 (1958), 435-462.
- [8] Dubikajtis, L.: La Géométrie de Lie. Warschau 1958.
- [9] Heyting, A.: Axiomatic projective Geometry. Amsterdam 1963.
- [10] ^{on} P~~ost~~trjagin, L.S.: Topologische Gruppen I. Leipzig 1958.
- [11] v.d.Waerden, L.B., und Smid, L.J.: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. 110 (1935), 753-776.

Lebenslauf

Am 29. März 1936 wurde ich in Schanghai geboren, und zwar als ältestes Kind meiner Eltern 陳炳煌 (Chen, Ping-huang) und 丁懷芬 (Ting, Weh-fun). Im Alter von 6 Jahren erhielt ich die erste Volksschulausbildung in der amerikanischen Missions-schule 中西附小 (Tsung-tschu-fu-schah) in Schanghai. Unsere Familie siedelte im September 1946 über nach Taipei auf Formosa. Dort besuchte ich zuerst ein weiteres Jahr die Volksschule und anschließend 6 Jahre die staatliche Höhere Schule 師大附中 (Tse-ta-fu-tsung). Nach dem Abitur bestand ich im September 1953 die Aufnahmesprüfung für das Physik-Studium an der Taiwan-Universität in Taipei. Aus gesundheitlichen Gründen konnte ich nach dem 2. Semester mein Studium nicht unmittelbar fortsetzen. Im April 1956 wurde ich für 4 Monate zur Militärausbildung eingezogen. Daraufhin studierte ich wiederum an der Taiwan-Universität 2 Semester. Ich belegte das WS 57/8 und SS 58 an der T.H. Aachen. Vom WS 58/9 bis SS 65 immatrikulierte ich an der Universität Frankfurt/M. Die Diplom-Vorprüfung für Studierende der Physik legte ich im Nov. 1959 ab. Im August 1961 gab mir Prof. Dr. B. Mrowka ein Thema zur Diplomarbeit. Das Resultat, daß man bei der Messung einer Komponente des magnetischen Momentes zugleich auch die anderen beiden Komponenten ebenso genau feststellen kann, fand keine Anerkennung. Neben theoretischer Physik gilt reiner Mathematik und Philosophie mein Interesse. Durch Vorlesungen von Prof. Dr. W. Benz wurde ich seit Herbst 1963 veranlaßt, mich mit den Grundlagen der Geometrie zu beschäftigen. Ich legte im Mai 1966 die Diplom-Hauptprüfung für Studierende der Mathematik ab. Von Okt. 1961 bis Sept. 63 erhielt ich ein Stipendium des DAAD. Von Okt. 63 bis Sept. 66 war ich Wiss. Hilfskraft bei Prof. Benz an der Universität Frankfurt. Seit Okt. 66 verwaltete ich eine Assistentenstelle am Math. Inst. der Ruhr-Universität Bochum.

陳毅

(Chen, Yi)

BÖHLER-DRUCK

87 WÜRZBURG, Wirsbergstr. 10
Tel. 54143